ROSSANA DI DOMENICANTONIO | NOEMÍ LUBOMIRSKY
ANA LUCÍA RIVERA

Matemática inicial para ingeniería

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

MATEMÁTICA INICIAL PARA INGENIERÍA

Rossana Di Domenicantonio
Noemí Lubomirsky
Ana Lucía Rivera

Facultad de Ingeniería de la UNLP

Di domenicantonio, Rossana
Matemática inicial para ingeniería / Rossana Di domenicantonio ; Noemí Lubomirsky ; Ana Lucía Rivera. - 1a ed . - La Plata : EDULP, 2019.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-8348-16-2

1. Matemática. 2. Ingeniería. I. Lubomirsky, Noemí. II. Rivera, Ana Lucía. III. Título.
CDD 510.711

Agradecimientos

Al Ing. Marcos Actis, Decano de la Facultad mientras se redactó, se elaboró el material y se realizó la primera edición del mismo, por la confianza, apoyo y constante preocupación por la materia.

A la profesora Daniela Sánchez y su grupo docente por haber trabajado con el primer borrador del material de septiembre a noviembre de 2017.

A la profesora Elfriede Chalar por sus contribuciones, sugerencias y aportes al material.

A la Dra. Laura Langoni, coordinadora de Matemática A, por la revisión del material y recomendaciones en la articulación de contenidos.

A todos los docentes de la Cátedra que conforman este gran equipo, por el compromiso, ideas, aportes y sugerencias enviadas para las siguientes ediciones. Destacamos la gran predisposición para fomentar mejoras que redunden en un mejor aprovechamiento del material didáctico en clase y el entusiasmo para llevar adelante esta importante tarea docente!!!

Ana, Noemí y Rossana

Índice

SEGUNDA PARTE

Prólogo

LA EVOLUCION DEL CURSO DE INGRESO A “MATE PI”

A mediados de los años noventa comencé a participar en la Comisión de Enseñanza del Consejo Académico de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Un tema recurrente en ese entonces era el curso de ingreso, cuya organización había que definir: todos los años se nombraba un coordinador distinto. Fue en esa instancia que, junto a la profesora Liliana Carboni, quien marcara mi vida académica en la Facultad, luchamos para que se pusiera alguna exigencia a ese curso, que era meramente simbólico. Creíamos con Liliana que, al no tener requisitos, una gran cantidad de alumnos no le daban la importancia que tenía, ya fuera para refrescar o aprender los contenidos de Matemática del secundario que deberían saber al ingresar a Ingeniería. Lo único que pudimos hacer fue imponer que se tomara asistencia y que, por lo menos, se exigiera un ochenta por ciento de asistencia, como único requisito para la aprobación. Realmente, los alumnos se confiaban y, después, el salto en las materias de primer año era enorme y la deserción era una constante.

En el año 2001, asumió un nuevo decano, Ing. Alberto Giovambattista, y una nueva gestión, con la que comenzó una verdadera transformación en la enseñanza de la Matemática. Me tocó protagonizar ese cambio desde el Consejo Directivo: el curso de ingreso pasó a ser un Curso de Nivelación con aprobación obligatoria para cursar las materias de primer año. No fue fácil –los alumnos tomaron la Facultad–, pero se mantuvo la decisión de seguir con las propuestas. Esas cosas de la vida hicieron que las licenciadas Liliana Carboni y Cristina Vacchino elaboraran el primer apunte del nuevo Curso de Nivelación. Otros cambios fueron que se eligió por concurso a la coordinadora del curso: se dejó el viejo modelo de elegir la coordinación todos los años y pasó a ser una cátedra con docentes estables elegidos por concurso. Si bien Liliana no fue la elegida, la Lic. Nilda García comenzó la transformación del curso, de “ingreso” a “nivelación”, realizando una muy buena tarea. Estos cambios, junto a las modificaciones en Matemática, revirtieron los índices de deserción que tenía la Facultad, pasando de una retención de alumnos en los primeros años del treinta al sesenta por ciento. No cabe duda de que, al ser obligatorio, el curso llevaba a los alumnos a enfrentarse con problemas que, si bien eran contenidos del secundario, debían aprobar en un examen similar al de una asignatura universitaria, lo cual los preparaba mejor para lo que se venía en la carrera.

Al concluir su mandato el Ing. Giovambattista, me tocó ser el secretario académico y, posteriormente, vicedecano y decano. Pasaron varios coordinadores con distintivos matices y distintos apuntes. Ya siendo decano, y con la coordinación de Rossana Di Domenicantonio, realmente pude ser entendido en lo que creía debería ser el Curso de Nivelación. Obviamente, fui superado en mis expectativas, ya que su evolución fue incluso más allá de lo que yo pensaba. ¿Cuál era mi pensamiento? Que, si bien el curso era de aprobación obligatoria, realmente debía ser nivelatorio y no expulsivo, que debía dar a los ingresantes distintas oportunidades para que nivelen sus conocimientos y, así, poder iniciar mejor preparados el primer año de su carrera.

En 2015, con la adecuación de la Ley Universitaria, ya no se podía tener una materia que restringiera el inicio de las asignaturas de primer año. Debido a esto, decidimos, con Rossana, crear una asignatura que fuera parte del plan de estudios, pero con contenidos del secundario, y fue así que el Consejo Directivo acompañó la propuesta de mantener una asignatura introductoria que se debía aprobar para cursar las Matemáticas. Afortunadamente, la misma agrupación estudiantil que había tomado la Facultad cuando el Curso de Nivelación paso a ser de aprobación obligatoria, acompañó la propuesta de creación de Matemática Pi, en sus distintas modalidades, entendiendo que era beneficiosa para los alumnos. El incremento en la retención de alumnos fue la demostración más cabal del cambio producido: pasamos de dos mil ochocientos alumnos activos, en 2002, a seis mil, en 2015, siendo la aprobación obligatoria uno de los motivos, junto al cambio en la enseñanza de la Matemática, otra gran revolución.

Con el nuevo plan 2018, la asignatura pasó a ser parte de la currícula, marcando todo un logro de años de continuidad en las políticas académicas de ingreso, las cuales siguen con la nueva gestión del decano Ing. Horacio Frene, actualmente al frente de la Facultad.

Por último, quiero manifestar mi agradecimiento eterno a Rossana, que supo entender lo que creía debería ser una nivelación para un alumno que, si bien tiene capacidades para entender las Matemáticas, no tuvo antes las oportunidades, ya sea por el colegio de procedencia o por las circunstancias del medio donde se desarrolló, para tener los conocimientos necesarios para enfrentar una carrera de Ingeniería.

Espero que aprovechen este excelente libro, que fue realizado con todo cariño por Rossana y su equipo, personas comprometidas con la formación de Ingenieros.

Marcos Daniel Actis

Introducción

Para el alumno:

¡Te damos la bienvenida a la Facultad de Ingeniería de la UNLP!

Así como la función principal de un ingeniero es realizar diseños, desarrollar soluciones, comprometerse con las necesidades sociales, industriales o económicas, nuestro objetivo como cátedra es proporcionarte herramientas para que puedas abordar, profundizar y nivelar los contenidos del colegio y puedas adaptarte a la metodología de trabajo en este nuevo escenario que es la universidad y, así, estar mejor preparado para el resto de las materias de la carrera.

Un ingeniero debe identificar y comprender los obstáculos más importantes para poder realizar un buen diseño. Creo que debes pensar que es la primera materia que cursas en la Facultad y te demandará tiempo y esfuerzo. Es importante reflexionar que notarás cambios respecto del colegio pero tienes que comprender que asumes un importante desafío al emprender esta carrera que elegiste y no tienes que desanimarte ante algún obstáculo, sino utilizarlo de puntapié para encontrar, con ayuda nuestra, el mejor camino para el estudio.

El conocimiento de la ciencia, la matemática y la experiencia son utilizados por los ingenieros para encontrar las mejores soluciones a problemas concretos, creando modelos matemáticos que les permitan analizarlos y obtener potenciales soluciones optimizando los recursos disponibles. Espero que identifiques los conceptos, comprendas la argumentación teórica y puedas aplicarlos a los problemas y ejercicios propuestos. La ejercitación en el estudio de matemática es muy importante y los docentes estamos dispuestos a facilitarte los medios para que puedas realizar la materia con éxito.

Recuerda que todos los ingenieros fueron alguna vez ingresantes y que, como dijo Robert Collier, el éxito es la suma de pequeños esfuerzos, repetidos día tras día…

Rossana Di Domenicantonio

Presentación

Este material teórico-práctico propone acompañar al alumno en el repaso, ejercitación y profundización de los contenidos necesarios para iniciar esta etapa en la Facultad.

Para desarrollar cada tema se utilizaron definiciones, ejemplos, problemas resueltos y actividades que tendrás que resolver en la medida en que vayas avanzando en la lectura del apunte. Para facilitar la comprensión de algunos temas, se incluyeron representaciones gráficas que permiten relacionar los registros analítico y geométrico de un mismo concepto. También se incluyeron cuadros con resúmenes de algunos temas para facilitar el estudio de los mismos y, en algunos casos, la comparación de similitudes o diferencias que ayudan a la interpretación del tema.

Encontrarás, además, símbolos que te ayudarán a recorrer el material:

Para observaciones y comentarios.

Para advertencias importantes que debes tener en cuenta.

En este tipo de recuadros habrá ejemplos.

Con este formato identificaremos los problemas y ejercicios resueltos.

Actividades

Bajo este recuadro encontrarás la ejercitación correspondiente al tema que acabas de leer.

Este recuadro es utilizado para los teoremas y resultados importantes.

Antes de comenzar el desarrollo de los temas, presentamos algunas tablas que te resultarán útiles durante el curso: una con áreas y perímetros de las figuras más comunes y otra con símbolos matemáticos y letras griegas. Además, todos los capítulos tienen actividades de repaso al final, donde encontrarás ejercicios que relacionan todos los contenidos. Y algunos capítulos tienen un anexo donde se desarrollan temas complementarios de lectura optativa.

Este material consta de **dos módulos,** cada uno de los cuales tiene dos capítulos.

El primer capítulo es el de **Conjuntos numéricos y elementos de geometría**, cuyo objetivo es recordar y clarificar las operaciones, definiciones y propiedades en los distintos conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales, así como recordar algunos conceptos de geometría. El capítulo siguiente se llama **Ecuaciones y polinomios** y su objetivo es el de estudiar la resolución de distintos tipos de ecuaciones (lineales, cuadráticas, polinómicas y fraccionarias), operar con polinomios y repasar la factorización de polinomios y de otras expresiones algebraicas.

En el capítulo 3, de **Rectas, cónicas y sistemas de ecuaciones**, trabajaremos geométricamente en el plano coordenado, donde representaremos las rectas y cónicas:

circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. En estos casos, se repasarán no solamente las ecuaciones de estas curvas, sino también su relación con su representación geométrica. Además, se estudiarán métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y sistemas mixtos. Finalmente, en el capítulo 4, de **Trigonometría**, revisaremos los conceptos de ángulos, sistemas de medición y relaciones trigonométricas. Además, resolveremos triángulos rectángulos y no rectángulos con los teoremas correspondientes.

Tabla de símbolos matemáticos

$<$	Menor ($a< b$ significa que a es menor que b)
$>$	Mayor ($a> b$ significa que a es mayor que b)
$=$	Igual
$\neq$	No es igual, o es diferente a…
/	Tal que
:	Tal que
$\rightarrow$	Entonces
$\leftrightarrow$	Si y solamente si
∞	Infinito
$\therefore$	Por lo tanto
$\cong$	Aproximadamente igual
$\lvert x\rvert$	Valor absoluto de x, es decir, $\lvert x\rvert = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0. \end{cases}$
$\leq$	Menor o igual ($a \leq b$ si a es menor o es igual a b)
$\geq$	Mayor o igual ($a \geq b$ si a es mayor o es igual a b)
$\pm$	Más/menos: $\pm a$ representa dos valores: $+a$ y $-a$.
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\subset$	Inclusión ($\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ si el conjunto A está contenido en el conjunto B).

Alfabeto griego

α	alfa	η	eta	ν	nu	τ	tau
β	beta	θ	theta (tita)	ξ	xi	υ	ípsilon
γ	gamma	ι	iota	ο	ómicron	φ	phi (fi)
δ	delta	κ	kappa	π	pi	χ	ji o chi
ε	épsilon	λ	lambda	ρ	rho (ro)	ψ	psi
ζ	zeta	μ	mu	σ	sigma	ω	omega

Otras unidades

Símbolo	Unidad	Equivalencia
kg	kilogramo	$1\,kg = 1000\,gr$
l	litro	$1\,l = 1000\,cm^3$

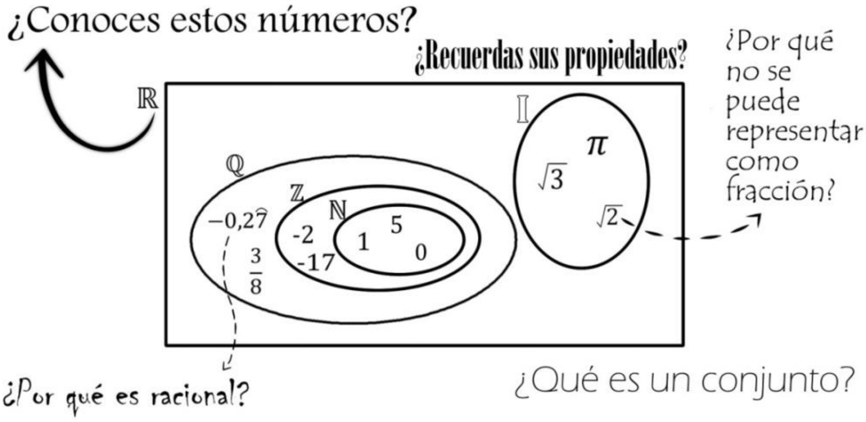
Unidades de longitud y equivalencias[1]

Símbolo	Unidad	Equivalencia en metros
km	kilómetro	$1\,km = 1000\,m$
hm	hectómetro	$1\,hm = 100\,m$
dam	decámetro	$1\,dam = 10\,m$
m	metro	
dm	decímetro	$10\,dm = 1\,m$
cm	centímetro	$100\,cm = 1\,m$
mm	milímetro	$1000\,mm = 1\,m$

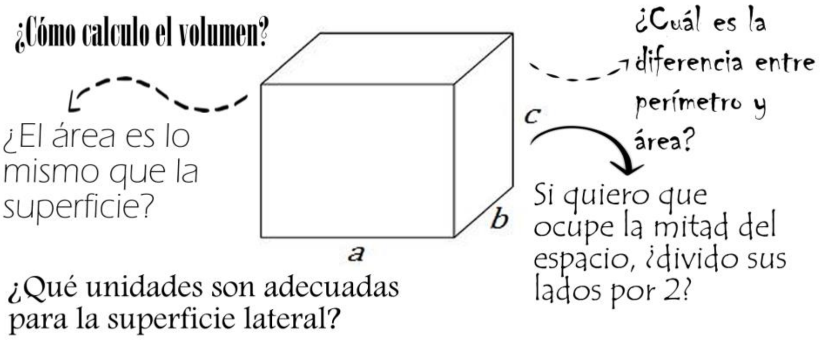
[1] En este material utilizaremos los símbolos del Sistema Internacional de Unidades.

CAPÍTULO 1

Conjuntos numéricos y elementos de geometría



Con estas y otras preguntas, vamos a recordar, repasar y estudiar las propiedades de los números reales con los que trabajaremos en este material. Los números reales se usan en matemática, en ingeniería y en muchas disciplinas para representar magnitudes, simbolizar situaciones y realizar cálculos que queramos estudiar, predecir o analizar. En este capítulo daremos profundidad y repaso al estudio del conjunto de los números reales, como también a las propiedades que ellos cumplen.



Además, repasaremos algunos conceptos de geometría, una rama de la matemática que se ocupa de estudiar las propiedades de las figuras en el plano y los cuerpos en el espacio. Algunas propiedades son, por ejemplo, el perímetro o el área de una figura plana o el volumen de un cuerpo. Estas medidas se utilizan muy frecuentemente en diferentes aplicaciones de la ingeniería.

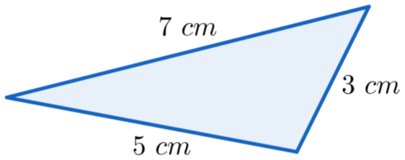
Elementos de geometría

Perímetro

El **perímetro** es la longitud del borde de una figura geométrica plana y cerrada.

Cuando el borde esté formado por diferentes curvas o lados, se sumarán todas las longitudes que lo componen.

Veamos algunos ejemplos de cómo calcular el perímetro.

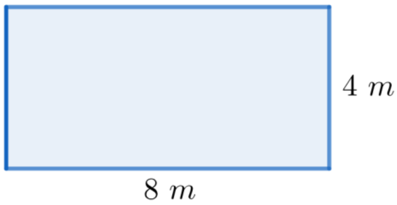


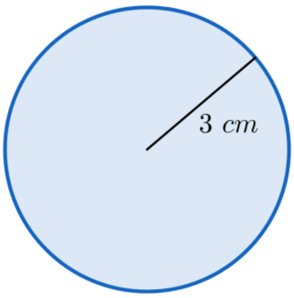
El borde de la figura es la suma de los tres lados del triángulo, es decir, en este caso tenemos que el perímetro del triángulo es:

$$Perímetro: 3\ cm + 7\ cm + 5\ cm = 15\ cm$$

En el caso de un rectángulo, como hay dos pares de lados iguales, el perímetro será:

$$Perímetro = 4\ m + 8\ m + 4\ m + 8\ m$$
$$= 2.4\ m + 2.8\ m = 24\ m$$

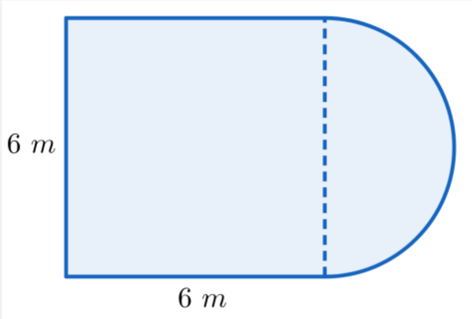




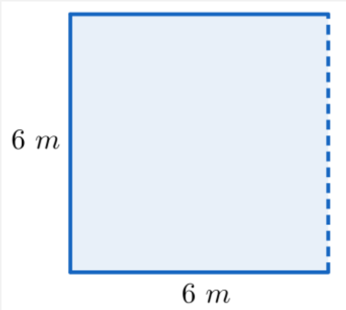
El borde de un círculo se llama circunferencia. Entonces, calcular el perímetro de un círculo es hallar la longitud de la circunferencia. Utilizaremos que $Perímetro = 2.\pi.r$ donde r es la longitud del radio de la circunferencia y, en este caso $r = 3\ cm$, entonces:

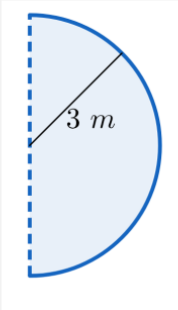
$$Perímetro = 2.\pi.3\ cm = 6.\pi\ cm$$

Calcular el perímetro de la siguiente figura



En este caso podemos descomponer la figura en un cuadrado de lado $6\ m$ al que le falta un lado, y una semicircunferencia de radio $3\ m$, ya que el lado del cuadrado es el diámetro del círculo, es decir, dos veces el radio. Gráficamente:





Entonces

$$Perímetro = 3.6\ m + \frac{2.\pi.3}{2} m = 18\ m + 3.\pi\ m$$

Observemos que la línea punteada no se suma, ya que no es parte del borde de la figura dada.

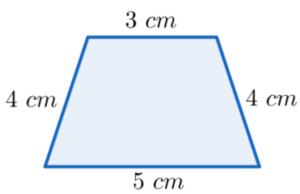
Actividades

1. Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

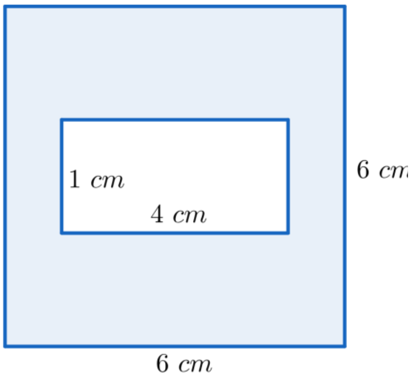
   a) Un triángulo isósceles (que tiene dos lados iguales) donde cada uno de los lados iguales mide $5\ cm$ y el restante mide $8\ cm$.

   b) Una circunferencia cuyo diámetro mide $20\ cm$.

   c)

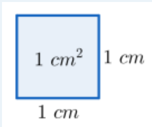


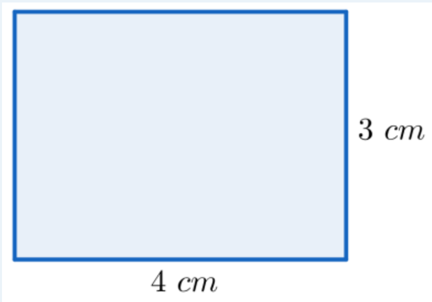
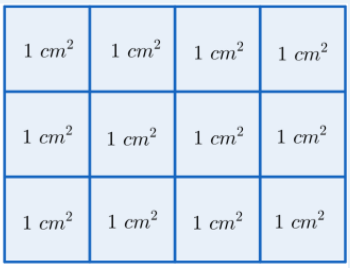
   d)



Área

El **área** es la medida del interior de una figura plana cerrada. Esta medida también se conoce como superficie de la figura y se expresa en unidades de superficie (por ejemplo cm^2, m^2, etc…)

> Si tenemos un cuadrado en el cual cada lado mide $1\ cm$, decimos que el mismo tiene un área de $1\ cm^2$.
>
> 
>

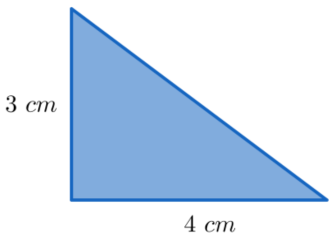
> Si tenemos ahora un rectángulo con una base de $4\ cm$ y una altura de $3\ cm$, entonces su área es de $4\ cm\ .\ 3\ cm = 12\ cm^2$.
>
> 
>
>
> Esto tiene sentido, ya que dentro del rectángulo entran 12 cuadrados de área $1\ cm^2$.
>
> 
>

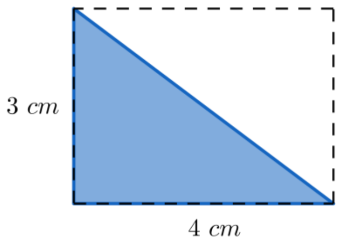
De manera general, si tenemos un rectángulo de base b y altura h, el área del rectángulo es $b.h$, es decir,

$$\boxed{\text{Área del rectángulo} = base.altura}$$

Veamos cómo se calcula el área de algunas figuras utilizando el área del rectángulo.

Supongamos que queremos hallar el área del triángulo que está graficado a la izquierda.

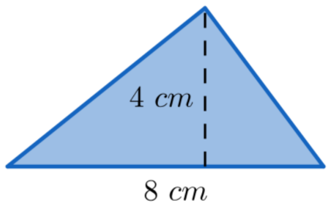


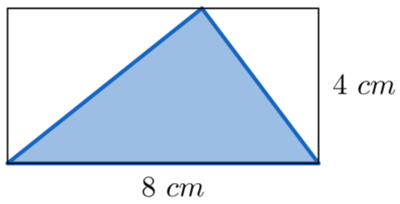


Para hacerlo, notemos que podemos trazar un rectángulo con la misma altura y base que el triángulo (gráfico de la derecha). Es sencillo observar que la superficie sombreada del triángulo es la mitad de la superficie del rectángulo, por lo que tenemos que el área del triángulo será la mitad del área del rectángulo. Es decir,

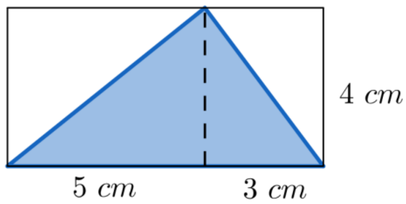
$$Área = \frac{4\,cm\,.\,3\,cm}{2} = 6\,cm^2$$

Notemos que aunque el triángulo tenga otra forma, siempre podemos trazar un rectángulo con la misma base y altura que el triángulo:





Observemos que si dividimos el triángulo con un segmento perpendicular a la base, que pasa por el vértice opuesto, obtenemos dos rectángulos, de los cuales el área sombreada representa la mitad. Entonces, tenemos que



$$Área = \frac{5\,cm\,.\,4\,cm}{2} + \frac{3\,cm\,.\,4\,cm}{2} = 16\,cm^2$$

Pero, además, podemos notar que el área sombreada representa la mitad del área del rectángulo grande, por lo que también se puede calcular como

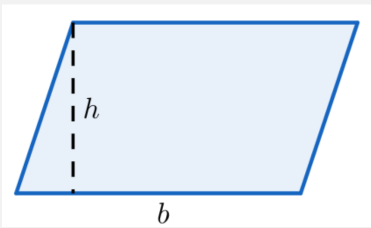
$$Área = \frac{8\,cm\,.\,4\,cm}{2} = 16\,cm^2$$

Es por ello que podemos deducir que el área del triángulo será la mitad del área del rectángulo con misma base y misma altura. Es decir

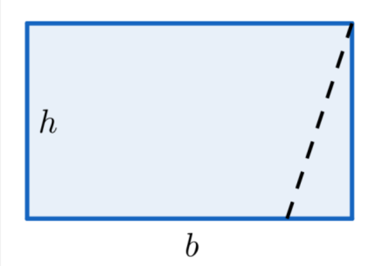
$$\boxed{Área\ triángulo = \frac{base.\,altura}{2}}$$

Observar que para deducir el área del triángulo siempre se calcula mediante el mismo procedimiento independientemente de qué tipo de triángulo es.

Hallar la expresión para el área del siguiente paralelogramo



Podemos notar que si recortamos el triángulo rectángulo que se forma uniendo con una recta perpendicular a la base, que pasa por uno de los vértices, y lo desplazamos para el otro costado del paralelogramo, obtenemos un rectángulo de la siguiente forma

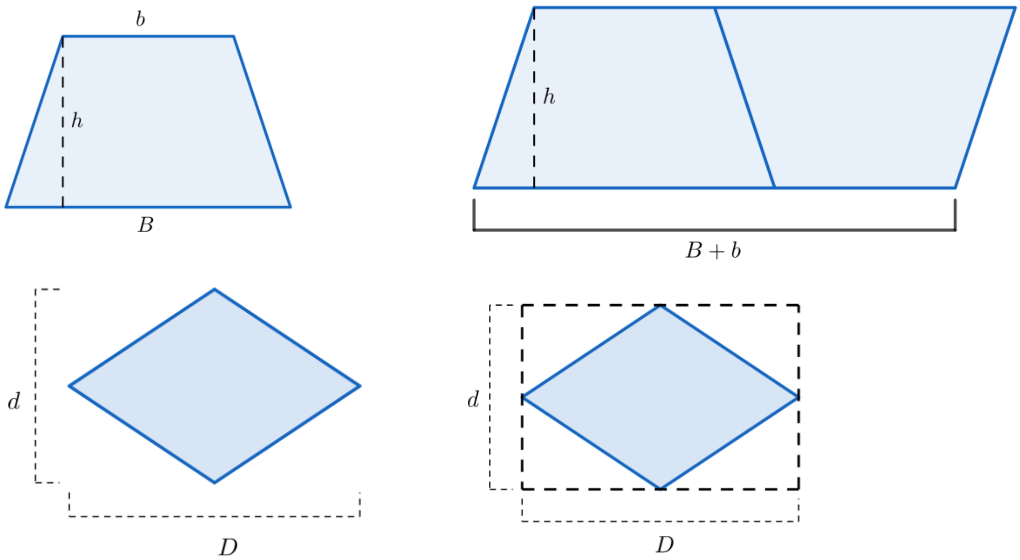


Por lo que el área del paralelogramo es igual que el área de rectángulo. Es decir,

$$\boxed{\text{Área paralelogramo} = base.altura}$$

Actividades

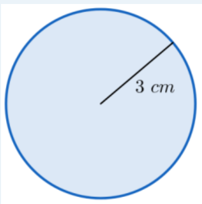
2. Calcular la expresión para el área del trapecio y del rombo de la izquierda, utilizando las gráficas de la derecha como guía:



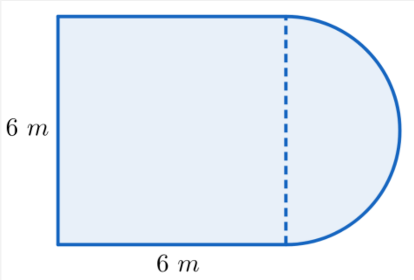
Para calcular el área de un círculo de radio r utilizamos

$$\boxed{\text{Área círculo} = \pi.r^2}$$

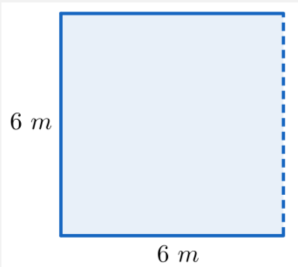
El área del círculo de radio $r = 3\ cm$ es $\text{Área} = \pi.(3\ cm)^2 = \pi.9\ cm^2$

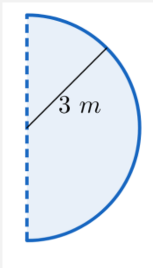


Calcular el área de la siguiente figura



Nuevamente podemos descomponer la figura en un cuadrado de lado $6\ m$ y una semicircunferencia de radio $3\ m$ para calcular sus áreas por separado y al final sumarlas.





Entonces

$$Área = 6\ m.6\ m + \frac{\pi.(3\ m)^2}{2} = 36\ m^2 + \frac{9.\pi}{2} m^2$$

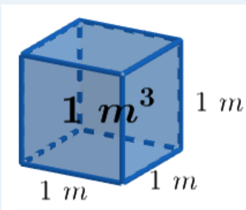
Actividades

3. Calcular el área de las figuras de la actividad 1.

Volumen

El **volumen** es la medida del espacio que ocupa un cuerpo. Esta medida se asocia al concepto de capacidad del cuerpo y se expresa en unidades de volumen (por ejemplo cm^3, m^3, etc…)

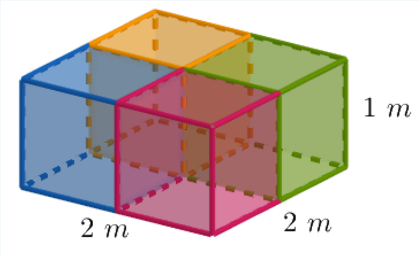
Si tenemos un cubo cuyas caras son cuadrados de lado $1\ m$, decimos que su volumen es un metro cúbico, lo que denotamos $1\ m^3$



Si ahora tenemos un cuerpo cuya base es un cuadrado de lado $2\,m$ y su altura es $1\,m$, tenemos que su volumen es

$$Volumen = 2\,m\,.\,2\,m\,.\,1\,m = 4\,m^3$$

Esto tiene sentido, ya que dentro del cuerpo entran cuatro cubos de $1\,m$ de lado. Gráficamente:

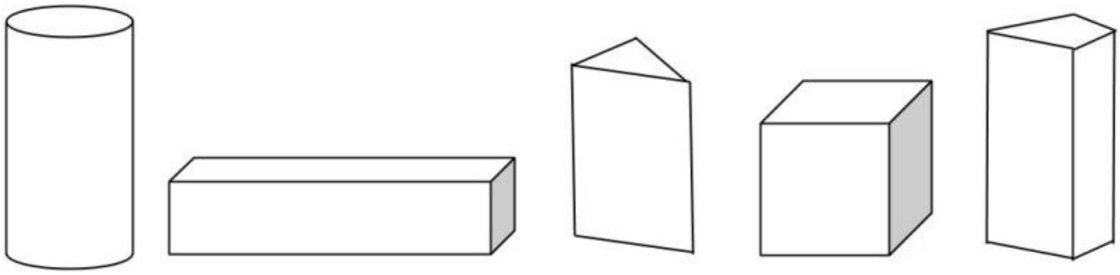


De manera general, si tenemos un cuerpo donde todas sus caras son rectángulos y tiene una base de lados a y b y una altura h, tenemos que el volumen del cuerpo es $a.b.h$, es decir, el área de la base por la altura.

En esta materia estudiaremos aquellas figuras geométricas tridimensionales dadas por una base (que puede ser: cuadrada, rectangular, circular, triangular, etc.) y una altura. El volumen de las mismas se puede calcular como:

$$\boxed{Volumen = área\ de\ la\ base\ .\ altura}$$

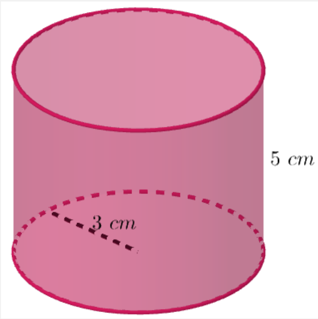
Estas figuras tridimensionales son llamadas cuerpos cilíndricos. Algunos ejemplos son:



Sin embargo hay otros cuerpos cuyo volumen se calcula de otra manera. Por ejemplo, una esfera, cuya área y volumen se deducirán en Matemática B.

Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio $3\ cm$ y altura $5\ cm$.

Para poder resolver, vamos a plantear un esquema gráfico del cuerpo cuyo volumen queremos calcular:



Como la base es un círculo de radio $3\ cm$, sabemos que su área es

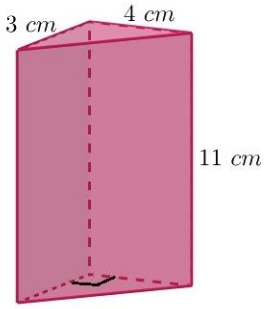
$$\pi.(3\ cm)^2 = \pi.9\ cm^2$$

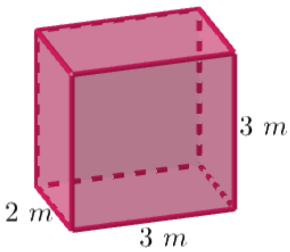
Por lo tanto, el volumen del cilindro será

$$Volumen = \pi.9\ cm^2.5\ cm = 45.\pi\ cm^3$$

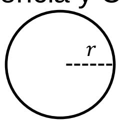
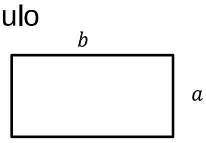
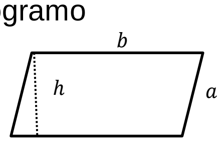
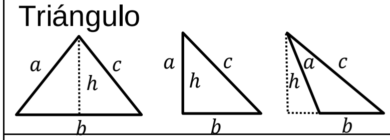
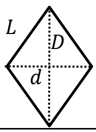
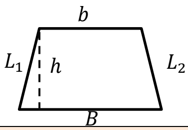
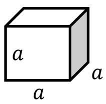
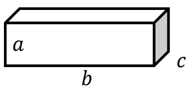
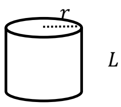
Actividades

4. Hallar el volumen del agua de una pileta con base rectangular de $3\ m$ por $5\ m$ y $2\ m$ de profundidad.
5. Calcular el volumen de los siguientes cuerpos:





Fórmulas de Geometría

Gráfico de figura	Perímetro	Área
Circunferencia y Círculo 	$P = 2\pi r$ Circunferencia	$A = \pi r^2$ Círculo
Cuadrado 	$P = 4L$	$A = L^2$
Rectángulo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,a$
Paralelogramo 	$P = 2\,a + 2\,b$	$A = b\,h$
Triángulo 	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b\,h}{2}$
Rombo 	$P = 4\,L$	$A = \dfrac{D\,d}{2}$
Trapecio 	$P = B + b + L_1 + L_2$	$A = \dfrac{(B+b)}{2}\,h$
Gráfico de cuerpo	**Área total**	**Volumen**
Cubo 	$A = 6\,a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo 	$A = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ac$	$V = a\,b\,c$
Cilindro 	$A = 2\pi r^2 + 2\pi r L$	$V = \pi r^2 L$

Conjuntos

Llamamos **conjunto** a una colección de elementos. Los **elementos** de un conjunto pueden ser: personas, números, colores, letras, figuras, etc. Un conjunto puede definirse mediante una propiedad que todos sus elementos poseen o nombrando a cada elemento.

> El conjunto de los colores del arcoíris es:
>
> I = {Rojo, Naranja, Amarillo, Verde, Azul, Añil, Violeta}
>
> o podemos escribirlo como:
>
> I= {colores del arcoíris}

Para saber si un conjunto está bien definido, tenemos que considerar lo siguiente: cuando la pertenencia de un elemento a un conjunto es clara, el conjunto estará bien definido. Por ejemplo, nadie dudaría de incluir al domingo entre los días de la semana, pero el conjunto de personas simpáticas no está bien definido, ya que hay dudas si determinadas personas pertenecen o no al conjunto, pues la cualidad de simpatía no es precisa.

Otra forma de definir un conjunto es hacerlo a partir de sus elementos. En particular, un conjunto puede escribirse como una lista de elementos. Pero cambiar el orden de dicha lista o añadir elementos repetidos no define un conjunto nuevo.

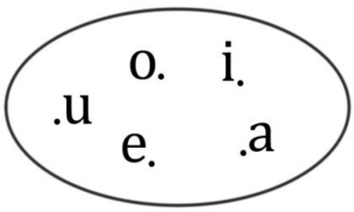
> S = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}
>
> = {Martes, Viernes, Jueves, Lunes, Miércoles}
>
> $\mathrm{L} = \{x/x \text{ es letra de la palabra manzana}\} = \{\mathrm{m, a, n, z}\}$

El símbolo "/" se lee "tal que" y en matemática se utiliza para indicar que determinados elementos cumplen la o las propiedades descriptas a continuación del símbolo.

Representamos un conjunto con una letra mayúscula, escribiendo entre llaves sus elementos, separados por comas.

> El conjunto A, que está integrado por las vocales, se representa así:
>
> $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Gráficamente utilizamos el **diagrama de Venn**[1], que son líneas circulares u ovoides cerradas donde se disponen los elementos señalados mediante puntos. El conjunto A mencionado quedaría representado así:



[1]En homenaje a su creador, el matemático y lógico británico John Venn (1834-1923).

Diremos que un elemento b **pertenece** al conjunto A, y lo notaremos $b \in A$, si es un elemento que está en el conjunto.

Si definimos un conjunto **por extensión**, debemos enumerar cada uno de sus elementos. En el caso de las vocales, debemos nombrar todas ellas: a, e, i, o, u, es decir $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Si lo definimos **por comprensión** nombramos solamente la propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto. En el mismo caso diríamos que $A = \{x/x\ es\ una\ vocal\}$ que leemos: A es el conjunto de x, tales que x es una vocal o $A = \{las\ vocales\}$.

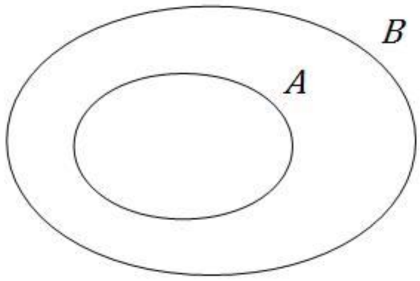
Un conjunto es **finito** si tiene una cantidad finita de elementos. Por ejemplo, el conjunto de las letras del idioma castellano es finito porque en total son 27 letras.

Los conjuntos **infinitos** son aquellos que tienen infinitos elementos que los componen. El método más fácil para representar este tipo de conjuntos es por comprensión.

> El conjunto de los números naturales que terminan en tres, podemos definirlo como:
>
> $$T = \{x/x \text{ es número natural y termina en tres}\}$$

También existe una manera de representar algunos conjuntos infinitos por extensión. Es suficiente con mostrar los primeros elementos del conjunto e indicar con puntos suspensivos que la lista continúa indefinidamente. En el caso del conjunto T, definido en el ejemplo anterior y conformado por los números que terminan en tres, se tiene $T = \{3,\ 13,\ 23,\ 33,\ 43,\ 53,\ \dots\}$.

Se dice que un conjunto A **está incluido** en otro conjunto B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B, y se denota como $A \subset B$. Diremos además que A es un **subconjunto** de B.



> El conjunto de alumnos que cursan "Matemática A" está incluido en el conjunto de alumnos de la Facultad de Ingeniería.

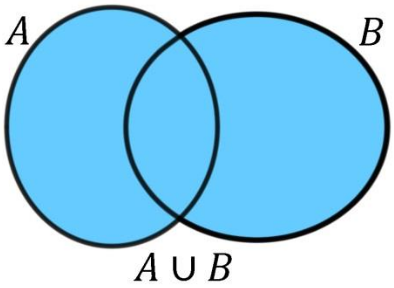
Definimos al **conjunto vacío**, como aquel conjunto que no tiene ningún elemento en su interior, y lo notamos como $\emptyset$ o { }.

> A es el conjunto de todos los perros que vuelan, entonces $A = \emptyset$.

Si dos conjuntos están formados por los mismos elementos, se dice que son **conjuntos iguales**.

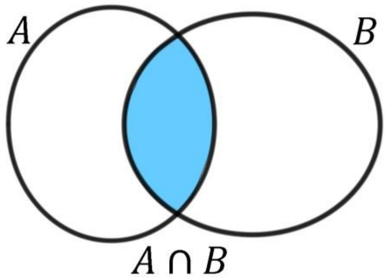
Operaciones entre conjuntos

La **unión de conjuntos** A y B es un nuevo conjunto $A \cup B$ que está formado por los elementos de los dos conjuntos.



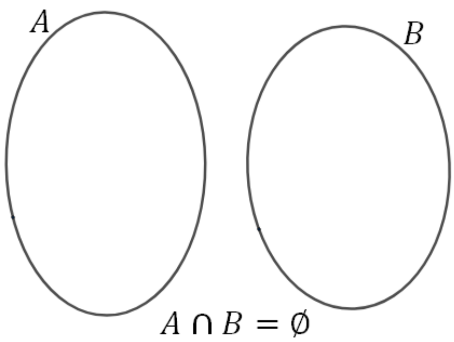
> Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

La intersección de dos (o más) conjuntos es una operación que resulta en otro conjunto que contiene los elementos comunes a los conjuntos originales y se denota por el símbolo $\cap$.



> Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$, entonces la intersección de dichos conjuntos estará formada por todos los elementos que estén, a la vez, en los dos conjuntos, esto es $A \cap B = \{a, e\}$.

Dos conjuntos se dicen que son **disjuntos** cuando no hay elementos en común entre ellos, es decir A y B son disjuntos cuando $A \cap B = \emptyset$.



Un grupo de alumnos de 6º año de un colegio fue parte de una competencia de atletismo. Los alumnos Mario, Catalina, Juliana y Fernando participaron en lanzamiento de disco; las alumnas Catalina y Juliana participaron de la carrera de 100 metros; y los alumnos Lucas y Florencia participaron del maratón. Podemos resumir esos datos diciendo que:

$$L = \{Mario, Catalina, Juliana, Fernando\}$$
$$C = \{Catalina, Juliana\}$$
$$M = \{Florencia, Lucas\}$$

Cuando nos referimos a un alumno que participa de una determinada competencia, diremos que pertenece al conjunto determinado por esa competencia. Por ejemplo, Mario pertenece al grupo de lanzadores, es decir Mario $\in L$.

Si quisiéramos averiguar qué alumnos participaron del lanzamiento y la carrera, lo que estamos buscando son aquellos alumnos que figuran en el conjunto L y el conjunto C a la vez, es decir buscamos $L \cap C$. En este caso, tenemos que tanto Catalina como Juliana participaron de ambas competencias, es decir $L \cap C = \{Catalina, Juliana\}$.

Si, en cambio, queremos aquellos alumnos que participaron en el lanzamiento de disco y en la maratón, como no hay alumnos en común, podemos decir que $L \cap M = \emptyset$ o, directamente, que el conjunto L es disjunto con el conjunto M.

Si estamos buscando el conjunto que reúne a todos los representantes del curso que fueron al torneo, lo que buscamos son aquellos alumnos que participaron en al menos una competencia, por lo que buscamos la unión de todos los conjuntos. Tenemos, entonces

$$L \cup C \cup M = \{Mario, Catalina, Juliana, Fernando, Florencia, Lucas\}$$

Por último, todos los alumnos que participaron de la carrera también participaron de lanzamiento, por lo que podemos decir que $C \subset L$.

Sean A y B los conjuntos dados por:

$$A = \{números\ naturales\ de\ dos\ cifras\ en\ los\ cuales\ la\ primera\ cifra\ es\ 2\}$$
$$B = \{números\ naturales\ de\ dos\ cifras\ en\ los\ cuales\ la\ segunda\ cifra\ es\ 7\}$$

Dar los conjuntos A, B y $A \cap B$ por extensión.

Para dar el conjunto A por extensión, debemos hallar todos los números de dos cifras cuya primera cifra es el 2. Por ejemplo, el 24 está en A porque cumple esa condición (lo que podemos escribir como $24 \in A$). De ese mismo modo, podemos hallar los 10 números que componen el conjunto A:

$$A = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}.$$

De la misma manera, podemos escribir por extensión el conjunto B, buscando todos los números de dos cifras que terminan en 7*:*

$$B = \{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}.$$

Para dar $A \cap B$ por extensión, debemos hallar números que pertenezcan simultáneamente a los conjuntos A y B. Mirando los desarrollos de ambos conjuntos podemos observar que el único número que cumple esto es el 27*. Por lo tanto*

$$A \cap B = \{27\}.$$

Observemos que el número 27 *es el único número de dos cifras que empieza con* 2 *y termina con* 7*, es decir, es el único número que cumple con las condiciones de ambos conjuntos cuando están dados por comprensión.*

Actividades

6. Expresar los siguientes conjuntos por comprensión
   a) $\mathrm{A} = \{\mathrm{Rojo}, \mathrm{Amarillo}, \mathrm{Azul}\}$
   b) $\mathrm{B} = \{\mathrm{Chile}, \mathrm{Brasil}, \mathrm{Uruguay}, \mathrm{Bolivia}, \mathrm{Paraguay}\}$
   c) $\mathrm{C} = \{\mathrm{m}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \mathrm{a}\}$
   d) $\mathrm{D} = \{\mathrm{Do}, \mathrm{Re}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Fa}, \mathrm{Sol}, \mathrm{La}, \mathrm{Si}\}$
7. Expresar los siguientes conjuntos por extensión
   a) $\mathrm{A} = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$
   b) $\mathrm{B} = \{\text{Colores de la bandera de Italia}\}$
   c) $\mathrm{C} = \{x/\ x \text{ es una letra de la palabra facultad}\}$
8. Sea E el conjunto de las estaciones del año y $\mathrm{A} = \{\mathrm{Primavera}, \mathrm{Otoño}\}$. Calcular $\mathrm{A} \cup \mathrm{E}$ y $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}$
9. Dados los siguientes conjuntos, realizar las operaciones pedidas:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{perro}, \mathrm{gato}, \mathrm{león}, \mathrm{pantera}\}$$
$$\mathrm{B} = \{\mathrm{loro}, \mathrm{perro}, \mathrm{pájaro}\}$$
$$\mathrm{C} = \{\mathrm{gato}, \mathrm{caballo}, \mathrm{pez}\}$$

   a) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C}$
   b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
   c) $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

Conjuntos numéricos

Los conjuntos conformados por números ocupan un lugar de especial importancia en el mundo de la matemática. Seguramente, habrás escuchado, o incluso trabajado, con distintos tipos de números como por ejemplo 2, -5, $\frac{1}{3}$ o $\sqrt{5}$. Todas estas expresiones forman parte de diferentes conjuntos de números, a los que llamamos **conjuntos numéricos**.

Estudiaremos cuatro conjuntos numéricos en particular, los números naturales, los números enteros, los números racionales o fraccionarios y los números reales.

Estos conjuntos de números han ido apareciendo a medida que la humanidad se ha visto en la necesidad de solucionar problemas y retos cada vez más complejos y más profundos.

Naturales

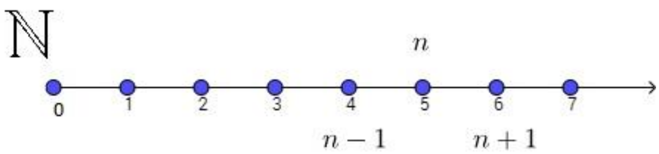
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El hombre tuvo la necesidad de representar cantidades de lo que tenía para saber con qué contaba exactamente y poder negociar. De ahí surgió la necesidad de crear símbolos que representaran esas cantidades. Por ejemplo, si alguien sabía cuántas gallinas tenía, podría establecer del mismo modo la cantidad de días que podría alimentar a su familia. A partir de esta necesidad, el hombre creó lo que hoy conocemos como **números naturales**.

Debido a la importancia de este conjunto de números, se creó un símbolo especial para identificarlo. Usaremos la letra $\mathbb{N}$ para representar el conjunto de los números naturales.

Dado un número natural n, se define a su siguiente como $n+1$, y a su anterior como $n-1$ (siempre que n no sea el cero).

La representación en la recta numérica es:



Dados dos números naturales, podemos determinar si uno es mayor que el otro. Esta comparación nos determina una relación de orden entre ambos elementos. Por lo que se dice que el conjunto $\mathbb{N}$ es un **conjunto totalmente ordenado**.

> Sabemos que 5 es mayor que 2, o sea $5 > 2$, entonces 5 estará a la derecha del 2 en la recta numérica. Esta relación de orden entre los números 5 y 2 la podemos interpretar diciendo que 2 es menor que 5 y escribir como $2 < 5$.

En la sección de inecuaciones del Capítulo 2, repasaremos el uso de los símbolos mayor ($>$) y menor ($<$).

¿Cuál es el último número natural? No hay, sencillamente no existe un número natural que sea más grande que todos los demás, ya que cada vez que pensamos en uno, podemos encontrar muchos que sean mayores que él. Decimos entonces que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Como los números naturales se utilizan para contar elementos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos; dependiendo del área de la ciencia, el conjunto de los números naturales puede definirse, entonces, de dos maneras distintas: con o sin el cero. Nosotros estamos considerando que el cero pertenece a los naturales, y es el primer elemento.

Operaciones en el conjunto de los números naturales

Cuando tenemos un conjunto A, podemos definir operaciones entre elementos de A y estudiar las propiedades que cumplen. Una de las propiedades importantes que pueden tener las operaciones es la **ley de cierre**, que dice que si realizamos una operación entre dos elementos del conjunto A, el resultado será otro elemento de A. Veamos esto con un ejemplo en los naturales.

> Si tomamos el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales y definimos la operación de suma entre los números, se cumple que para cualquier par de números naturales a y b, si realizamos la suma de ellos, el resultado será un número natural. En símbolos:
>
> Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $a + b \in \mathbb{N}$.
>
> Podemos decir, entonces, que el conjunto de los números naturales cumple con la ley de cierre con la suma.

Es importante observar que no todos los conjuntos cumplen la ley de cierre con una operación. Por ejemplo, el conjunto $A = \{x/x \text{ es un número impar}\}$ no es cerrado con la operación de suma, pues, por ejemplo, los números 3 y 7 son números que pertenecen al conjunto A (porque son impares), pero si los sumamos tenemos

$$3 + 7 = 10 \notin A$$

Es decir, que sumamos dos números del conjunto A y obtuvimos un número que no pertenecía al conjunto A. Podemos concluir, entonces, que el conjunto de los números impares no cumple con la ley de cierre para la suma.

Suma

La suma es la operación matemática que resulta de reunir varias cantidades en una sola. También se conoce como adición. A cada cantidad que interviene en la suma se la denomina sumando y al resultado se lo llama suma.

$$\underbrace{(\underbrace{a}+\underbrace{b})}_{sumandos} = \underbrace{c}_{suma}$$

Propiedades de la suma

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, tenemos

- <u>Ley de cierre</u>: El resultado de sumar dos números naturales es otro número natural, es decir, $a + b \in \mathbb{N}$.
- <u>Asociativa</u>: El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado, en símbolos, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- <u>Conmutativa</u>: El orden de los sumandos no varía la suma, es decir, $a + b = b + a$.
- <u>Existencia del neutro "0"</u>: El 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número, es decir $a + 0 = a$.

Observemos que para cualquier número natural $a \neq 0$, no existe ningún número natural b tal que $a + b = 0$, es decir, que la suma tenga como resultado al neutro.

Propiedad asociativa Ley de cierre

$$2 + \underbrace{3 + 8 + 0}_{\downarrow} = 2 + \underbrace{8 + 3 + 0}_{\downarrow} = \overbrace{(2 + 8)}^{\uparrow} + \overbrace{(3 + \underbrace{0}_{\downarrow})}^{\uparrow} = 10 + 3 = 13 \overbrace{\in \mathbb{N}}^{\uparrow}$$

Propiedad conmutativa Elemento neutro

Resta

La resta es la operación inversa de la suma y nos permite calcular la diferencia entre dos números. También se la conoce como sustracción y a las cantidades intervinientes se las llama minuendo y sustraendo.

$$\underbrace{a}_{minuendo} - \underbrace{b}_{sustraendo} = \underbrace{c}_{diferencia}$$

A diferencia de la suma, cuando se restan dos números naturales, el primero (minuendo) debe ser mayor o igual que el segundo (sustraendo), pues en caso contrario no se obtendrá un número natural. Además, la resta no cumple la mayoría de las propiedades que cumple la suma:

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, tenemos

- No se cumple la Ley de cierre, es decir la resta no es cerrada. La diferencia entre dos números naturales pertenece a los naturales solamente si el minuendo es mayor o igual al sustraendo.
- No es asociativa: No es posible cambiar el orden en el que se realizan restas sucesivas sin alterar el resultado final de la operación. Es decir: $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.
- No es conmutativa: El resultado de la operación cambiará si se invierte la posición del minuendo y el sustraendo. Es decir: si $a \neq b$ tenemos que $a - b \neq b - a$.

- No existe elemento neutro: El número 0 se comporta como elemento neutro en la sustracción solo si se ubica en el sustraendo. No es el caso cuando se ubica en el minuendo. Es decir, $a - 0 = a$ pero $0 - a \neq a$.

Producto

Multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los números consigo mismo tantas veces como indica el otro. Por ejemplo, la multiplicación 5.2 consiste en sumar el número 2 cinco veces. A cada cantidad que interviene en el producto se la llama factor y al resultado se lo denomina producto.

$$\underbrace{\boldsymbol{a}}_{}.\underbrace{\boldsymbol{b}}_{factores} \quad = \quad \underbrace{\boldsymbol{c}}_{producto}$$

$$5.7 = \underbrace{7 + 7 + \cdots + 7}_{5\ veces} = 35$$

Propiedades de producto

Dados a, b y $c \in \mathbb{N}$, tenemos

- Ley de cierre: El resultado de multiplicar dos números naturales es otro número natural, es decir, $a.b \in \mathbb{N}$.
- Asociativa: El modo de agrupar los factores no varía el resultado, en símbolos, $(a.b).c = a.(b.c)$
- Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto, es decir, $a.b = b.a$
- Existencia del neutro "1": El 1 es el elemento neutro de la multiplicación de números naturales porque todo número multiplicado por él da el mismo número, es decir, $a.1 = a$.

Observemos que para cualquier número natural $a \neq 1$, no existe ningún número b natural tal que $a.b = 1$. Es decir, que el producto tenga por resultado al neutro.

Asociativa

$$2.\underbrace{7.5}_{\downarrow} = \overbrace{2.\underbrace{5.7}_{\downarrow}}^{\uparrow} = \overbrace{10.7}^{\uparrow} = \underbrace{70 \in \mathbb{N}}_{\downarrow}$$

Conmutativa Ley de cierre

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

La multiplicación de un número natural por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número natural por cada uno de los sumandos. Es decir,

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Es el proceso inverso de lo que se conoce como "sacar factor común".

> $2.(3+5) = 2.3 + 2.5.$
>
> Comprobemos que se cumplió la propiedad:
>
> $2.(3+5) = 2.(8) = 16$ y $2.3 + 2.5 = 6 + 10 = 16.$

Es muy importante que en los cálculos algebraicos, tanto de números naturales como de todos los cálculos que realicemos de ahora en más, prestemos mucha atención al correcto uso de los paréntesis ya que sin ellos un cálculo puede cambiar de resultado y ser otra cuenta totalmente diferente a la pedida.

> $2.2 + 7 \neq 2.(2+7)$ ya que $2.2 + 7 = 4 + 7 = 11$ mientras que $2.(2+7) = 2.2 + 2.7 = 4 + 14 = 18.$

Actividades

10. Calcular aplicando la propiedad distributiva
    - a) $8 \cdot (5 + 10)$
    - b) $(5+3) \cdot (2+7)$
    - c) $(a+b) \cdot (a+b)$
    - d) $(a+2+c) \cdot (a+b+1)$
    - e) $(a+2) \cdot (a+4)$
11. Colocar paréntesis donde corresponda para que el resultado sea verdadero:
    - a) $15 - 3 - 1 = 13$
    - b) $18 + 3 - 15 + 2 = 4$
    - c) $28 - 13 - 3 + 8 = 10$
    - d) $4 + 2\,.\,3 = 18$
12. Calcular:
    - a) $30 + 12 + 70 + 50 + 0 + 50 + 4$
    - b) $10 - 2 + 6 - 1 + 4 - 5 + 2$
    - c) $34 - 3 + 25 - 12 + 3$
    - d) $(2.3 - 5).(2 + 3)$

División

La división de un número a por un número b consiste en encontrar el número c tal que $c.b = a$.

En el conjunto de los números naturales no siempre la división da como resultado otro número natural, por ejemplo 3 dividido 2 no resulta otro número natural (o sea no se cumple la Ley de cierre para la división en $\mathbb{N}$). Al realizar la división entre dos números naturales, se obtienen un **cociente** y un **resto** que cumplen con el siguiente algoritmo:

> **Algoritmo de la división:** Dados dos números naturales p y q, con $q \neq 0$, existen únicos números naturales c (cociente) y r (resto), que verifican $p = q.c + r$ con $r < q$.

Por lo tanto, este algoritmo nos proporciona la siguiente relación entre el número que queremos dividir, al que llamamos **dividendo**, y el número por el cual dividimos, llamado **divisor**.

$$\boldsymbol{Dividendo = Divisor \cdot Cociente + Resto}$$

$$\begin{array}{rcrl|lcl}
Dividendo & \leftarrow & & 169 & \underline{\ 12\ \ } & \rightarrow & Divisor \\
 & & - & \underline{12} & 14 & \rightarrow & Cociente \\
 & & & 49 & & & \\
 & & - & \underline{48} & & & \\
Resto & \leftarrow & & 1 & & &
\end{array}$$

Entonces: $169 = 12.14 + 1.$

Siempre hay que tener cuidado con que el divisor sea distinto de cero. ¡La división por cero no está definida!

Sabemos que si queremos dividir 7 manzanas entre 3 niños, la cuenta no va a dar exacta, por lo que si le damos 2 manzanas a cada uno, nos sobrará una.

Ahora, ¿por qué no decidimos repartir solo una a cada uno de los niños y quedarnos con 4? Porque sabemos que 4 es mayor que 3, por lo que podríamos repartir una manzana más a cada niño. Esta situación se refleja en el algoritmo enunciado, por la condición de que el resto debe ser menor que el divisor. Entonces, si dividimos 7 por 3, obtenemos: $7 = 3.2 + 1$.

Divisibilidad

Si el resto de la división es cero, decimos que la división es exacta y nos queda que $p = q.c$

En este caso es equivalente decir que:

- q divide a p.
- p es divisible por q.
- q es un divisor de p.
- p es un múltiplo de q.
- q es un factor de p.

$18: 6 = 3$ por lo tanto $18 = 3.6$ con lo cual decimos que 6 divide a 18; que 18 es divisible por 3 y también es divisible por 6; 18 es múltiplo de 3 y de 6 y que tanto 6 como 3 son factores de 18.

Actividades

13. Aplicar el algoritmo de la división para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
    a) 9 dividido 4 b) 9 dividido 3 c) 4 dividido 7
14. ¿Es 18 un factor de los siguientes números? Justificar aplicando el algoritmo de la división:
    a) 270 b) 9 c) 308

Potenciación

La potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

$$5.5.5.5 = 5^4$$
$$2.2.2 = 2^3$$

Los elementos que constituyen una potencia son:

$$\underbrace{a}_{\text{Base}}^{\overbrace{b}^{\text{Exponente}}}$$

La **base** de la potencia es el número que multiplicamos por sí mismo.

El **exponente** de una potencia indica el número de veces que multiplicamos la base (en el ejemplo anterior de 5^4 el exponente es 4 y la base es 5).

En general, si n es un número natural:

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ veces}}$$

y se lee: potencia enésima de a.

La potencia 2 de un número se llama su “cuadrado” y la potencia 3 su “cubo”.

Propiedades de la potencia con base y exponente natural

- Un número a (distinto de cero) elevado a un exponente 0 es igual a 1, es decir $a^0 = 1$.

$3^0 = 1$

- Un número a elevado a 1 es igual a sí mismo, es decir $a^1 = a$.

$7^1 = 7$

- Producto de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes, $a^m . a^n = a^{m+n}$.

> $2^5 . 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$

- División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

> $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

- Potencia de una potencia: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

> $(2^5)^3 = 2^{5.3} = 2^{15}$

Observación: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ es decir, la potencia no es asociativa.

- Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. $a^n . b^n = (a.b)^n$

> $2^3 . 4^3 = (2.4)^3 = 8^3$

Esta propiedad también es conocida como propiedad distributiva de la potencia con respecto al producto, es decir, $(a.b)^n = a^n . b^n$

La potencia no es distributiva con respecto a la suma, es decir $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. Por ejemplo $(2+3)^2 = 5^2 = 25 \neq 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Factorización de un número natural

Para operar con los números muchas veces es más sencillo si los tenemos factorizados, es decir, escritos como producto de varios factores.

En los números naturales se define un **número primo** como aquel número mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. Hay infinitos números primos[2].

> 2 es primo ya que sus únicos divisores son 1 y 2. El 5 es primo ya que sus únicos divisores son 1 y 5. El 6 no es primo, ya que sus divisores son $1, 2, 3$ y 6.

[2] Los primeros números primos son los siguientes: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$

A diferencia de los números primos, los **números compuestos** son los números naturales que tienen algún divisor aparte de él mismo y el 1 y, por lo tanto, pueden factorizarse.

El número 1, por convención, no se considera ni primo ni compuesto.

> 6 es un número compuesto.

> 18 es compuesto, porque $18 = 1.18$, pero también $18 = 2.9$, o $18 = 3.6$

Factorizar un número será expresarlo como producto de factores primos.

> $$24 = 2.2.2.3 = 2^3.3$$
> $$3 = 3$$
> $$15 = 5.3$$

Separación en términos

Supongamos que queremos realizar el siguiente cálculo:

$$20:5 + 2 \cdot 7$$

Para resolverlo, hay un orden correcto en las operaciones. En este caso, debemos resolver primero las multiplicaciones y divisiones, y finalmente las sumas o restas. Para recordarlo, una forma fácil es separar en términos. Un término es una parte del cálculo que está separada por los signos $+$ o $-$.

En el ejemplo anterior,

$$\overbrace{20:5}^{1^\circ\ térm.} + \overbrace{2 \cdot 7}^{2^\circ\ térm.}$$

Entonces, debemos realizar primero las operaciones dentro de cada término, para obtener:

$$\overbrace{4}^{1^\circ\ térm.} + \overbrace{14}^{2^\circ\ térm.}$$

Ahora sí, cuando todos los términos están resueltos (no quedan operaciones para realizar dentro de cada término) podemos realizar los cálculos que quedan. En nuestro ejemplo:

$$4 + 14 = 18$$

Además de separar en términos, hay otros aspectos que debemos tener en cuenta. Supongamos que queremos realizar el siguiente cálculo:

$$3.6 - 44:(7 + 4)$$

En este caso, podemos notar que hay una parte del cálculo que está entre paréntesis. Si bien dentro del paréntesis aparece un signo $+$, no debemos considerar ese signo al separar en términos el cálculo. La forma correcta de separar en términos los cálculos del ejemplo anterior es:

$$\overbrace{3.6}^{1^\circ\ térm.} - \overbrace{44:(7 + 4)}^{2^\circ\ térm.}$$

Ahora sí debemos realizar las operaciones dentro de cada término, resolviendo primero el paréntesis:

$$\overbrace{3.6}^{1^\circ\ térm.} - \overbrace{44:(11)}^{2^\circ\ térm.}$$

$$\overbrace{18}^{1^\circ\ térm.} - \overbrace{4}^{2^\circ\ térm.}$$

Y finalmente, cuando ya tenemos resueltos los términos, realizamos la resta:

$$18 - 4 = 14$$

Supongamos ahora que queremos realizar la operación

$$2 + 4.(40 - (2 \cdot 3)^2)$$

Sabemos que el primer paso siempre es separar en términos. En este caso tenemos:

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{4.(40 - (2 \cdot 3)^2)}^{2^\circ\, térm.}$$

Entonces, para resolver, debemos primero operar en cada término y, al terminar de resolverlos, podemos sumar. En este ejemplo, en el primer término no hay operaciones para realizar, pero sí debemos trabajar con el segundo término. Como en este término hay un paréntesis, debemos primero resolverlo y, al terminar, recién podemos multiplicar. A su vez, dentro del paréntesis también debemos separar en dos subtérminos:

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{4.\left(\overbrace{40}^{1^\circ\, térm.} - \overbrace{(2 \cdot 3)^2}^{2^\circ\, térm.}\right)}^{2^\circ\, térm.}$$

Entonces, ya tenemos determinado el orden correcto de las operaciones a realizar en el segundo término:

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{4.\left(\overbrace{40}^{1^\circ\, térm.} - \overbrace{6^2}^{2^\circ\, térm.}\right)}^{2^\circ\, térm.}$$

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{4.\left(\overbrace{40}^{1^\circ\, térm.} - \overbrace{36}^{2^\circ\, térm.}\right)}^{2^\circ\, térm.}$$

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{4.(4)}^{2^\circ\, térm.}$$

$$\overbrace{2}^{1^\circ\, térm.} + \overbrace{16}^{2^\circ\, térm.}$$

Ahora que ya tenemos los dos términos resueltos (no nos queda ninguna operación sin realizar en ninguno de los términos) podemos realizar la suma final entre el primer y segundo término. Por lo tanto, podemos concluir que el resultado del cálculo es

$$2 + 4.(40 - (2 \cdot 3)^2) = 18$$

En general, cuando tengamos cálculos que realizar, es correcto seguir el siguiente orden:

- Separar en términos.
- Dentro de cada término resolver primero lo que esté entre paréntesis.
- Calcular los productos, potencias y divisiones (siempre de izquierda a derecha).
- Realizar las sumas y restas.

Actividades

15. Determinar si es necesario agregar paréntesis para que la igualdad sea válida. En caso afirmativo, colocar los paréntesis en el lugar correcto:

a) $4 + 4 : 4 + 4 = 1$

b) $4 : 4 + 4 : 4 = 2$

c) $4 + 4 + 4 : 4 = 3$

d) $4 + 4 - 4 : 4 = 4$

e) $4 . 4 + 4 : 4 = 5$

f) $4 + 4 + 4 : 4 = 6$

16. Realizar los siguientes cálculos:

a) $2 + 28 : 4 - 2 \cdot 4 =$

b) $(2 \cdot 7 + 6) \cdot 3 + 35 =$

c) $3 + 3 \cdot 3 + 3 : 3 - 3 =$

d) $64 : 32 + 3 - 45 : 9 =$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor

El **máximo común divisor ($\boldsymbol{M.C.D.}$)** de dos o más números es el mayor número que divide a estos de manera exacta. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar el máximo común divisor de los números 18 y 27. Para esto, recordemos cómo son los conjuntos de los divisores naturales de 18 y 27:

Divisores de 18: $1, 2, 3, 6, 9, 18$.

Divisores de 27: $1, 3, 9, 27$.

Los divisores comunes de 18 y 27 son el 1 y el 9, pero el más grande de los dos es el 9, por lo tanto, decimos que el máximo común divisor de 18 y 27 es 9, es decir, $M.C.D.(18,27) = 9$.

Una manera más fácil de hallar el máximo común división sin listar todos los divisores es descomponer en factores primos los números. En el ejemplo anterior tenemos:

$$18 = 2.3^2$$

$$27 = 3^3$$

Ahora, debemos ver qué factores tienen en común (en este caso, el 3) y elevarlos al menor exponente que aparecen (en este caso el menor exponente del 3 es 2).

Por lo tanto, podemos verificar, así, que el máximo común divisor entre 18 y 27 es 9.

En resumen, el procedimiento para el cálculo del máximo común divisor consiste en:

1. Descomponer los números en factores primos.
2. Tomar los factores comunes con el menor exponente que figura y hacer el producto de ellos.

Hallar el $M.C.D.$ de 72, 108 y 60.

Para esto descomponemos los tres números en sus factores primos:

72	2	108	2	60	2
36	2	54	2	30	2
18	2	27	3	15	3
9	3	9	3	5	5
3	3	3	3	1	
1		1			

$72 = 2^3.3^2$ $\quad 108 = 2^2.3^3$ $\quad 60 = 2^2.3.5$

En este caso, los factores que se repiten son 2 y 3. La menor potencia a la que aparece el 2 es 2, y la menor potencia con la que aparece el 3 es 1, por lo tanto, tenemos que

$$M.C.D.(72,108,60) = 2^2.3^1 = 12\,.$$

Si a y b son números primos distintos, hallar el $M.C.D.$ de ab^3 y b^5.

Para resolver esto, notemos que los números ya están expresados como productos de factores primos y que el único factor común es b. La menor potencia con la que aparece b es 3, por lo que tenemos que

$$M.C.D.(ab^3, b^5) = b^3$$

Actividades

17. Hallar el $M.C.D.$ en los siguientes casos:

a) $M.C.D.(10,25)$ b) $M.C.D.(8,18)$

c) $M.C.D.(13,91)$ d) $M.C.D.(ac^2b, a^2cb^3)$, con a, b y c números primos distintos.

Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo ($\boldsymbol{m.c.m.}$)** de dos o más números es el menor número que es múltiplo de estos, excluyendo el cero (que es múltiplo de todos los números).

Por ejemplo, si queremos hallar el mínimo común múltiplo de 9 y 6, consideremos los múltiplos (positivos) de los dos números:

Múltiplos de 9: $9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \ldots$

Múltiplos de 6: $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots$

Notemos que los números 9 y 6 tienen infinitos múltiplos comunes (los primeros son $18, 36, 54, \ldots$), pero hay solamente uno que es el menor, en este caso, es el 18. Por lo tanto, decimos que el mínimo común múltiplo entre 9 y 6 es 18, lo que escribimos:

$$m.c.m.(9,6) = 18.$$

Para poder hallar este múltiplo, existe un procedimiento similar al que realizamos para el máximo común divisor. En este caso, debemos dar la descomposición factorial de los números 9 y 6:

$$9 = 3^2$$

$$6 = 2.3$$

Y construimos el $m.c.m.(9,6)$ incluyendo todos los factores (los comunes y los no comunes) con el mayor exponente con el que aparecen. En este caso, los factores son 2 y 3, y el mayor exponente para el 2 es 1, mientras que el mayor exponente para el 3 es 2:

$$m.c.m.(9,6) = 2.3^2 = 18$$

Este procedimiento para el cálculo del mínimo común múltiplo se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman los factores comunes y no comunes con mayor exponente y se hace el producto entre ellos.

Hallar el $m.c.m.$ de: $72, 108$ y 60.

Descomponiendo los números tenemos que

$72 = 2^3.3^2$ $\qquad$ $108 = 2^2.3^3$ $\qquad$ $60 = 2^2.3.5$

Entonces, $m.c.m.(72,108,60) = 2^3.3^3.5 = 1080$.

Si a y b fueran números primos distintos de $2, 3$ y 5 y tuviéramos que hallar el $m.c.m.$ de $20a^2b$ y $15ab^3$, tenemos que las descomposiciones de los números en factores primos son:

$$20a^2b = 2^2.5.a^2.b$$

$$15ab^3 = 3.5.a.b^3$$

Luego, el $m.c.m.$ debe tener los factores 2 (con potencia 2), 5 (con potencia 1, porque las dos veces que aparece tiene esa potencia), 3 (con potencia 1), a (con potencia 2, que es la máxima potencia con la que aparece) y b (con potencia 3, por ser la máxima potencia que posee ese factor). Así, obtenemos:

$$m.c.m.(20a^2b, 15ab^3) = 2^2.5.3.a^2.b^3 = 60a^2b^3$$

Actividades

18. Calcular el $m.c.m.$ de:
    a) $m.c.m.(600,1000)$
    b) $m.c.m.(46,138)$
    c) $m.c.m.(a^2bc^5, c^7)$ donde a, b y c son números primos diferentes.

19. Calcular el $m.c.m.$ y el $M.C.D.$ de:
    a) 250 y 350
    b) $1048, 786$ y 3930

Enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

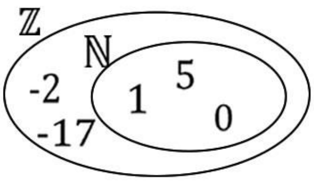
Diremos que el conjunto de los números **enteros** es igual al conjunto de los números naturales junto a los mismos números con signo negativo. Usaremos el símbolo $\mathbb{Z}$ para representar dicho conjunto.

Observemos que -0 es lo mismo que 0. Este es el único número entero que no es positivo ni negativo.

Además de poder representar cantidades enteras positivas, los números enteros nos permiten representar cantidades enteras negativas usadas, por ejemplo, cuando tenemos una deuda, o metros bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

Relación entre los números enteros y los números naturales

Entre ambos conjuntos existe una relación de inclusión ya que cada elemento del conjunto de los números naturales forma parte también del conjunto de los números enteros. Es decir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (los naturales están contenidos en los enteros), o lo que es equivalente, $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$.



Operaciones en el conjunto de los números enteros y valor absoluto

Los números enteros conservan algunas de las propiedades de los números naturales, pero también cuentan con otras propiedades. Hay tres operaciones entre números enteros que tienen como resultado números enteros, es decir, que cumplen la ley de cierre: la suma, la resta y la multiplicación.

$$\underbrace{4+5}_{\in \mathbb{Z}} = \overbrace{9}^{\in \mathbb{Z}} \qquad \underbrace{3.7}_{\in \mathbb{Z}} = \overbrace{21}^{\in \mathbb{Z}} \qquad \underbrace{4-7}_{\in \mathbb{Z}} = \overbrace{-3}^{\in \mathbb{Z}}$$

Una de las propiedades de $\mathbb{N}$ es que existe un primer elemento del conjunto. ¿Pasará lo mismo en el conjunto $\mathbb{Z}$? Como $\mathbb{Z}$ contiene cada elemento de los números naturales y sus negativos, se extiende indefinidamente tanto positiva, como negativamente. Es decir, $\mathbb{Z}$ no puede tener un primer elemento. Los puntos suspensivos en la expresión $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ indican que el conjunto continúa (tanto a la derecha como a la izquierda), por lo cual este conjunto es infinito.

El siguiente y anterior de un número entero

Como en el caso de los números naturales, cada vez que fijemos un número entero podremos determinar su **sucesor**, es decir, el número entero siguiente. Para los números naturales, el siguiente se obtiene al agregarle una unidad al número dado (o sea, el siguiente de n es $n+1$). Debe pasar lo mismo, entonces, para los números negativos.

¿Cuál será el sucesor de -4? Si, por ejemplo, le debemos 4 naranjas al verdulero, o sea, tenemos -4 naranjas y pagamos una ¿cuántas debemos ahora? La respuesta es que ahora debemos solamente 3 naranjas. Es decir, hemos encontrado que el sucesor de -4 es -3, o sea, a -4 le sumamos 1. Lo mismo pasa con el resto de los números negativos.

Análogamente, se deduce que para obtener el **anterior** de un número entero se resta 1.

Entonces si $n \in \mathbb{Z}$, el siguiente es $n+1$ y el anterior es $n-1$.

> Si $n = 6$, su siguiente es 7, ya que es $6+1$ y su anterior es 5, porque es $6-1$.

Propiedades de la suma

Las propiedades de la suma que se cumplían en el conjunto de los números naturales, siguen cumpliéndose en el conjunto de los enteros.

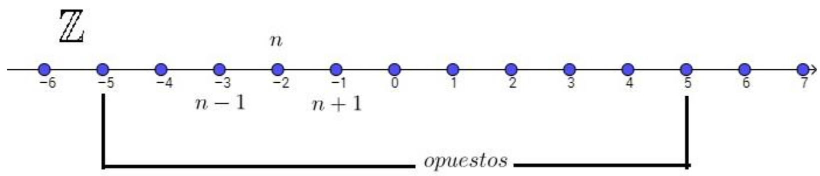
Dados a, b y $c \in \mathbb{Z}$, tenemos:

- Ley de cierre: suma de dos enteros es entero.
- Ley asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Ley conmutativa: $a + b = b + a$.
- Existencia del neutro que es el "0".

Agregamos ahora la siguiente propiedad:

- Existencia del opuesto: Para cada número $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$ o sea, el resultado es el neutro de la suma.

> Para 5, existe el -5, donde $5 + (-5) = 0$. Del mismo modo, para -6, existe el 6 tal que $(-6) + 6 = 0$.



Una consecuencia de la existencia del opuesto es el beneficio de poder escribir a la resta como una suma. Es decir, restar b es lo mismo que sumar el opuesto de b.

$$a - b = a + (-b)$$

> $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$

Propiedades del producto

En el producto, no se agrega ninguna propiedad extra a las que tenían los naturales.

Es decir: Dados a, b y $c \in \mathbb{Z},$ tenemos:

- Ley de cierre (producto de dos enteros es entero).
- Ley asociativa ($a.(b.c) = (a.b).c$).
- Ley conmutativa (el orden de los factores no altera el producto).
- Existencia del neutro que es el 1.

Regla de los signos

$+$ por $+$	$+$
$-$ por $-$	$+$
$+$ por $-$	$-$
$-$ por $+$	$-$

$2 \cdot 5 = 10$ $\quad$ $(-2) \cdot (-5) = 10$

$2 \cdot (-5) = -10$ $\quad$ $(-2) \cdot 5 = -10$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

La multiplicación de un número entero por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos. Es decir,

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Valor absoluto

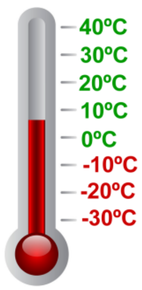
El **valor absoluto** (o módulo) de un número entero es su valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea este positivo $(+)$ o negativo $(-)$. El valor absoluto lo escribiremos entre barras verticales.

$|-5| = 5$, $|5| = 5$, es decir 5 es el valor absoluto de $+5$ y de -5

Aplicación del valor absoluto en casos reales de la vida cotidiana

- Distancia: Si estamos parados en un lugar y caminamos cierta cantidad de metros, decimos por ejemplo “caminé 10 pasos”, pero si retrocedemos no decimos “caminé -10 pasos”, ya que independientemente del sentido, la distancia recorrida sigue siendo 10 pasos.
- Ascensor: Otro ejemplo simple es pensar cuando tomamos un ascensor, decimos “subí 3 pisos”, sin embargo si bajamos, no decimos “hice -3 pisos”, sino que decimos “bajé 3 pisos”.

- Altitudes y profundidades: Como el 0 es considerado el nivel del mar, aquellos niveles que estén por encima de 0 se expresan con números positivos y aquellos niveles por debajo del nivel del mar se expresan con números negativos o decimos “tantos metros (en positivo) bajo el nivel del mar”.
- Termómetro: Cuando la temperatura está sobre $0°$, se indica con valores positivos, por ejemplo $5°$, en cambio, cuando está por debajo de $0°$, se indica $5°$ bajo cero (o sea $-5°$).



En forma genérica, el valor absoluto se define:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Esto significa que si a es un número mayor o igual a cero, el valor absoluto de ese número es el mismo número. En cambio si el número a es un número menor que cero, entonces, al anteponerle un signo menos, se transforma en positivo.

> Si $a = 2$, $|a| = 2$ y si $a = -3$ entonces $|a| = -(-3) = 3$.

Propiedades del valor absoluto

- $|a| \geq 0$ (Siempre el valor absoluto de un número es mayor o igual a cero)
- $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a.b| = |a|.|b|$
- $|a - b| = 0 \leftrightarrow a = b$
- $|a: b| = |a|: |b|$

$a \leftrightarrow b$ se lee como “ a si y sólo si b” y significa que la única forma de que sea válido b es que haya sido válido a y viceversa. En consecuencia, si no vale b no puede valer a (y viceversa).

> $$|-3| = |3| = 3 > 0$$
>
> $$|(-2).4| = |-2|.|4| = 2.4 = 8$$
>
> $$|-20: 4| = |-20|: |4| = 20: 4 = 5$$

Además, hay otra propiedad que se conoce como desigualdad triangular, que es muy utilizada en otras materias de matemática: $|a + b| \leq |a| + |b|$

> $$|3 + 7| = |10| = 10 = |3| + |7|$$
>
> $$|3 - 7| = |-4| = 4 < |3| + |7|$$

Actividades

20. Calcular

a) $3 \cdot 15 + (-4).2$

b) $(-20)\cdot(-5) - \frac{(-8)}{(-4)}$

c) $\frac{2.(-6)}{3} + \frac{(4+6)}{5} - (-8)$

d) $\frac{2+5+3}{2+3} - \frac{-12}{4} + \frac{8}{3+1}$

e) $(a-b)\cdot(a+b)$

21. Calcular aplicando propiedades

a) $5|4-7|$

b) $|10.(-2)|$

c) $|9-5| - |-6|$

d) $\left|\frac{6}{-3}\right| + |2|$

e) $|2-8| + |-5| - |-2|$

f) $|(-3).(-2)| - \left|\frac{12}{4}\right|$

División

Ya hemos visto la división y el algoritmo de la división en los naturales. Ahora, en los enteros hay que hacerle una pequeña modificación en el valor del resto, para que el mismo siga siendo válido y se mantenga la unicidad del cociente y del resto.

Algoritmo de la división en enteros: Dados dos números enteros p y q, con $q \neq 0$, existen únicos números enteros c (cociente) y r (resto), que verifican

$$p = q.c + r, \qquad 0 \leq r < |q|$$

Cuando el dividendo y/o el divisor son enteros negativos, se puede realizar el algoritmo de la división con el valor absoluto de esos mismos números (o sea, ellos mismos en positivo) y luego utilizar lo obtenido para deducir el cociente y el resto buscados con el correspondiente signo.

Queremos saber el cociente y el resto de dividir 17 por -5:

Sabemos que $17 = 5.3 + 2$. Como ahora nuestra división es por -5, podemos multiplicar tanto al cociente como al divisor por -1, y así el resultado no varía.

$$17 = (-5).(-3) + 2$$

Entonces, el cociente es -3 y el resto es 2.

Queremos ahora el cociente y el resto de dividir -17 por 5:

En este caso, lo que haremos es "pasarnos" con el cociente, obteniendo un resto negativo. Es decir, sabemos que

$$17 = 5.3 + 2,$$

pero usamos $17 = 5.4 - 3$.

Luego multiplicamos por -1 ambos miembros obteniendo

$$-17 = -5.4 + 3.$$

Por último, asociamos el signo menos con el divisor o el cociente según corresponda, obteniendo en nuestro caso

$$-17 = 5.(-4) + 3$$

Así, el cociente es -4 y el resto es 3.

Daniela le debe a Lucía 35 hojas de carpeta. Fue a la librería y le dijeron que las hojas se venden por docena. ¿Cuántos paquetes debe comprar y cuántas le van a sobrar?

Para poder plantear el problema, analicemos las cantidades con las que debemos trabajar: la deuda de Daniela la podemos representar con -35 hojas. Y como los paquetes vienen por docena, nuestro divisor será 12.

Para calcular los paquetes que debemos comprar, tenemos que hacer la división de -35 por 12.

Daniela pensó primero en comprar dos paquetes, pero se dio cuenta que no era suficiente, ya que hubieran faltado 11 hojas. Entonces, decidió comprar un paquete más y, de ese modo, pagaría la deuda y le sobraría una para ella.

Si queremos expresar esto matemáticamente, lo primero que pensó Daniela fue

$$35 = 12.2 + 11$$

pero se dio cuenta que debía comprar otro paquete de hojas:

$$35 = 12.3 - 1.$$

Como Daniela le debe 35 hojas a Lucía (-35), entonces multiplicamos por -1 a ambos lados de la igualdad y obtenemos

$$-35 = -12.3 + 1 = 12.(-3) + 1.$$

Entonces, debemos interpretar que Daniela debe darle 3 paquetes a Lucía, pero le sobrará una hoja para ella. Es decir, que debe comprar una cantidad de paquetes que le permita superar la cantidad de hojas que debe, para poder devolver lo necesario y que el resto sea positivo.

Actividades

22. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones, aplicando el algoritmo de la división:

a) $18:(-4)$ b) $-22:5$

c) $-27:(-4)$ d) $-4:9$

Análogo a los naturales, si el resto de la división de p por q es cero, decimos que la división es **exacta** y nos queda la igualdad $p = q.c$.

En este caso, se puede decir que

- q divide a p.
- p es divisible por q.
- q es un divisor de p.
- p es un múltiplo de q.
- q es un factor de p.

Para determinar el signo de una división, vale la misma regla de los signos que se utiliza en el producto.

$+$ dividido $+$	$+$
$-$ dividido $-$	$+$
$+$ dividido $-$	$-$
$-$ dividido $+$	$-$

$10 : 5 = 2 \quad (-10) : (-5) = 2 \quad 10 : (-5) = -2 \quad (-10) : 5 = -2$

Potenciación

Las propiedades de la potencia que se cumplían en el conjunto de los números naturales siguen cumpliéndose cuando la base es un número entero:

- Un número a (distinto de cero) elevado a un exponente 0 es igual a 1, es decir $a^0 = 1$.

  $(-4)^0 = 1$

- Un número a con potencia 1 es igual a sí mismo, es decir $a^1 = a$.

  $(-6)^1 = -6$

- Producto de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes, $a^m.a^n = a^{m+n}$.

  $(-3)^3.(-3)^6 = (-3)^{3+6} = (-3)^9$

- División de potencias con la misma base: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

  $(-1)^6 : (-1)^3 = (-1)^{6-3} = (-1)^3$

- Potencia de una potencia: Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

  $((-2)^4)^7 = (-2)^{4.7} = (-2)^{28}$

- Producto de potencias con el mismo exponente: Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. $a^n.b^n = (a.b)^n$

  $5^3.(-3)^3 = (5.(-3))^3 = (-15)^3$

Además de las propiedades de las potencias recién mencionadas, es importante considerar qué sucede con el signo al elevar un número.

Signo de la potencia

Las potencias de exponente par son siempre positivas.

$$(+)^{par} = +$$
$$(-)^{par} = +$$

$2^6 = 64$ y $(-2)^6 = 64$

Las potencias de exponente impar tiene el mismo signo de la base.

$$(+)^{impar} = +$$
$$(-)^{impar} = -$$

$2^3 = 8$ y $(-2)^3 = -8$

Actividades

23.Realizar los siguientes cálculos aplicando propiedades:

a) $(-3)^3.(-3)^2.(-1)^2$

b) $\left(-\frac{8}{4}\right)^2.(2^3)^2 : (2)^1$

c) $(2+4)^2.6^3$

d) $[(6)^2 : (2)^2 + (-4)^3 : (-4)^2]^2$

e) $9^{12} - 3^{24}$

f) $(5^{n+1} + 2.5^n) : 5^n$

g) $(6.7^n - 21.7^{n-1})^2 : 7^{2n}$

Simbolización matemática de expresiones con números enteros

Es importante aprender a interpretar enunciados en lenguaje real o natural y poder expresarlos en lenguaje matemático. Poder utilizarlo correctamente y traducir enunciados de problemas al lenguaje matemático y viceversa es un proceso que lleva tiempo y dedicación además de mucha ejercitación y práctica. Nosotros iniciamos un proceso que luego se irá completando en el resto de las materias de matemática de la carrera.

Simbolizar matemáticamente es traducir una situación o expresión dada al lenguaje matemático mediante letras, números y/o símbolos matemáticos, donde las cantidades que nos son desconocidas las representaremos con una letra a la que llamaremos **incógnita** (o **variable**). Una vez obtenida la expresión simbólica (abstracta) será más sencilla de manipular, para resolver un problema o situación. Para ello es recomendable seguir los siguientes pasos:

1°) Leer detenidamente el enunciado (una coma puede alterar la expresión).

2°) Definir las variables a utilizar.

3°) Representar matemáticamente o escribir con símbolos matemáticos la expresión o problema.

4°) Verificar lo simbolizado con el enunciado inicial.

> “La suma de un número entero cualquiera y su siguiente”
> Definimos n como un número entero, por lo tanto $n+1$ es el siguiente de n.
> Entonces, la modelización matemática de la expresión queda:
> $$n + (n+1).$$

> “El cuadrado de la edad de Analía dentro de 5 años”
> Vamos a llamar A a la edad actual de Analía contada en años. Dentro de 5 años, Analía tendrá $\mathrm{A}+5$ años, por lo que el cuadrado de su edad será
> $$(A+5)^2 \text{ con } A \in \mathbb{N}.$$

En general, en matemática para mostrar que un enunciado o proposición (igualdad o afirmación) es verdadera, se debe realizar una serie de pasos lógicos, haciendo uso de propiedades, relaciones y operaciones para llegar a mostrar en forma genérica y fundamentada que el enunciado o premisa es verdadero para todo número que se esté considerando. No basta probar con muchos ejemplos numéricos, sino que hay que hacerlo de manera genérica y simbólica. Para realizar esto existen varias técnicas, tales como inducción matemática, mostrar por el absurdo, etc., que se estudiarán en materias superiores.

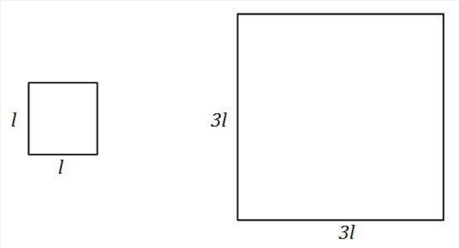
En cambio, para probar la falsedad de un enunciado matemático o de una proposición, alcanza con mostrar un contraejemplo, o sea con un solo caso que uno muestre que no vale, es suficiente para mostrar que algo es falso. Por ejemplo, "Si llueve entonces llevo un paraguas" es falsa, ya que no siempre me acuerdo de agarrarlo; “Todos los países contienen la letra A en su nombre” es falsa por más que Argentina, Cuba, España, Alemania, y varios países más lo cumplan, por ejemplo Chile o Perú sirven como contraejemplo de la afirmación.

Se llama valor de verdad de una proposición o enunciado matemático a su veracidad (Verdadero) o falsedad (Falso).

Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando analíticamente la respuesta:

- *"Si el lado de un cuadrado se triplica, entonces su perímetro también".*

Si llamamos l al lado del cuadrado original, entonces tenemos que el lado del nuevo cuadrado será $3l$, como podemos observar en la siguiente figura.



Como el perímetro es la suma de los cuatro lados, consideremos $P_1 = 4.l$
Luego planteamos que $P_2 = 4.(3l) = 3.(4l) = 3.P_1$.
Ya que con las propiedades conmutativa y asociativa llegamos a comprobar que el enunciado se cumple en forma genérica (independiente del valor del lado del cuadrado), la afirmación dada es verdadera.

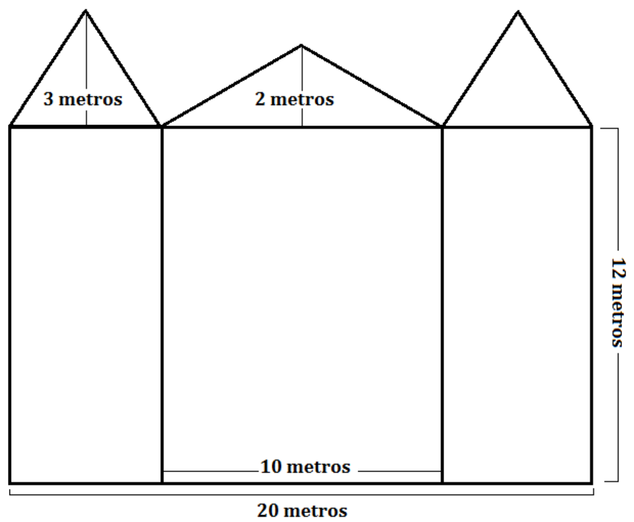
- *"El cuadrado de una resta es la resta de los cuadrados de ambos números"*

Es decir, lo que querríamos es ver si se cumple que $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
Si tomamos como contraejemplo los valores $a = 3$ y $b = 2$, vemos que esa igualdad no se cumple, ya que $(3-2)^2 = 1 \neq (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$, por lo tanto la afirmación es falsa.

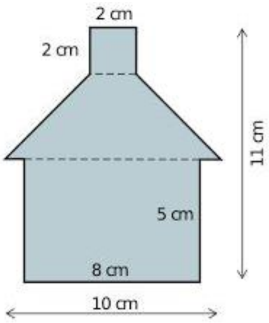
Actividades

24. Simbolizar matemáticamente los siguientes enunciados:
    a) m se obtiene a partir de multiplicar tres enteros consecutivos.
    b) La suma del cubo del anterior de $m \in \mathbb{Z}$, con el triple del cuadrado de su siguiente.
    c) El número entero m es tal que la diferencia entre el cubo de su siguiente con su anterior es igual al doble de su siguiente.
25. Consultando las fórmulas de geometría del material escribir las expresiones de:
    a) La superficie y el perímetro de un cuadrado de lado $3k$.
    b) La superficie y el perímetro de un rectángulo de base a y altura b.
    c) La superficie y el perímetro de una circunferencia de radio $4s$.
    d) La superficie lateral y el volumen de un cubo de lado $t+1$.
    e) El área de un triángulo rectángulo de altura h y base b.
    f) El área de un triángulo no rectángulo de altura h y base b.

26. Para comprar un alambrado para rodear un patio rectangular, ¿necesitamos calcular el perímetro o el área para decidir cuánto comprar?
27. Con el objetivo de comprar un fertilizante para el césped de un patio, ¿necesitamos usar el perímetro o el área para decidir cuánto comprar?
28. Determinar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando la respuesta:
    a) Si el lado de un cuadrado se triplica, su área resulta 9 veces el área original.
    b) Si $-a$ es entero entonces a es entero positivo.
    c) Si n y m son números enteros, entonces $n^4 + 5.m^2 - n.m$ es un número entero.
29. Escribir las expresiones matemáticas que representen a las siguientes situaciones:
    a) El área de un rectángulo cuya base es el triple que su altura.
    b) La diferencia entre la edad de un padre y un hijo, de los que se sabe que la edad del padre cuadruplica a la del hijo.
    c) La suma de dos números donde el segundo es 4 unidades menor que el doble del primero.
    d) La suma de las edades de Juan y Pedro dentro de 5 años sabiendo que, actualmente, la edad de Juan supera en 4 años a la edad de Pedro.
    e) El producto de un número entero positivo con la séptima parte del cuadrado de su siguiente.
30. Sabiendo que todas las habitaciones son rectangulares ¿cuál de los siguientes departamentos es más grande?
    a) Departamento 1: Una habitación de 3 metros por 3 metros, un baño de $1{,}5$ metros por 2 metros, una cocina comedor de 4 metros por 3 metros, un living de 3 metros por $5{,}5$ metros.
    b) Departamento 2: Dos habitaciones de 3 metros por 4 metros, un baño cuadrado de 2 metros de lado, un living cocina-comedor de 4 metros por 5 metros.
    c) Departamento 3: Un loft de 7 metros por 6 metros.
31. Calcular la cantidad de pintura que se necesita para pintar el frente del edificio de la figura, sabiendo que se necesitan dos litros de pintura por metro cuadrado y que las dos torres laterales son iguales.



32. Calcular el área de la siguiente figura.



33. Un limpiador cobra $\$500$ por limpiar una alfombra de 15 metros por 10 metros. ¿Cuánto cobrará por limpiar una alfombra de 30 metros por 20 metros?

Algunos subconjuntos de los números enteros

Múltiplo de un número

Como ya hemos visto, si al dividir el número p por q tenemos un resto 0, decimos que p es múltiplo de q.

Formalmente, dados p y q, si ambos son enteros, se dice que p es un **múltiplo** de q si y solo si $p = n\,.q$, para un entero n.

$$p = n.q \text{ , con } n \in \mathbb{Z}$$

> 55 es un múltiplo de 11 porque $55 = 5.11$. En este caso $p = 55$, $n = 5$ y $q = 11$.

> 36 es múltiplo de 3 porque $36 = 12.3$. En este caso $p = 36$, $n = 12$ y $q = 3$.

Divisor de un número

Como ya habíamos visto anteriormente, los divisores de un número son aquellos valores que dividen al número en partes exactas. Así, dado un número p, si la división de p por q es exacta (o sea, el resto es cero), entonces, se dice que q es **divisor** de p. También se puede decir que p es divisible por q o que p es un múltiplo de q.

> Los divisores de 36 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$ y ± 36.

> Los divisores de -15 son $\pm 1, \pm 3$, ± 5 y ± 15.

El símbolo $\pm$ es solo una notación. Sirve para indicar en una única expresión que hay dos valores posibles: uno con el signo $+$ y otro con el signo $-$. Por ejemplo: ± 3 significa que nos referimos a 3 y a -3.

Todo número entero es divisible por ± 1, por sí mismo y por su opuesto.

Números pares

$$\mathrm{P} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Si tuviéramos que definir al conjunto de los números pares por comprensión, es decir, decir la cualidad que caracteriza a los números pares diríamos que son los múltiplos de 2. ¿Y cómo definiríamos a los múltiplos de 2?

Diremos que un número a es múltiplo de 2 si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2 \cdot k$

> 16 es par, ya que $16 = 2.k$ con $k = 8 \in \mathbb{Z}$
>
> -24 es par, porque $-24 = 2.k$ con $k = -12 \in \mathbb{Z}$

A partir de esta definición, podríamos preguntarnos, ¿qué ocurre si sumamos dos números pares? ¿Será par? Este simple problema nos impone la necesidad de simbolizar matemáticamente y resolver de manera genérica.

Para comenzar, consideremos dos números pares cualesquiera, a y b. Como ambos son pares, podemos escribir $a = 2 \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$; $b = 2 \cdot m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Si sumamos a con b tenemos, $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot m = 2 \cdot (k + m)$. Ahora, como k y m son enteros, y además están sumados, por la Ley de Cierre para la suma de enteros, tenemos que $k + m \in \mathbb{Z}$. Con lo cual, si llamamos $n = k + m$ como n es entero, tenemos $a + b = 2 \cdot n$ con $n \in \mathbb{Z}$, es decir que hemos demostrado simbólicamente que la suma de dos números pares es par.

Esta definición de los números pares en los números enteros, vale también para el conjunto de los números naturales.

Actividades

34. Suponiendo que a y b son números enteros pares probar:
    a) $2a + 3b$ es par.
    b) $3a - b$ es par.

Números Impares

$$\mathrm{I} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

Otro subconjunto del conjunto de los enteros es el de los números impares. En este caso, no podríamos decir que los impares son múltiplos de algún número en particular. Sin embargo, no es muy difícil darse cuenta de que cualquier número impar es el consecutivo de un número par, por lo que podemos afirmar que un número entero a es impar si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 2 \cdot k + 1.$$

Análogamente, podemos definir los números impares en los naturales, donde la condición necesaria es que si $a = 2.k + 1$, k debe pertenecer a los naturales.

7 es impar ya que $7 = 2.(3) + 1$ siendo $3 \in \mathbb{Z}$.

-9 es impar ya que $-9 = 2.(-5) + 1$ siendo $-5 \in \mathbb{Z}$.

Comprobar que la suma de dos números impares es siempre un número par.

A partir de la definición, si consideramos dos números impares a y b, tenemos que $a = 2.k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$ y $b = 2c + 1$, con $c \in \mathbb{Z}$. Entonces, sumando

$$a + b = 2k + 1 + 2c + 1 = 2(k + c) + 2 = 2(k + c + 1)$$

En virtud de la Ley de cierre, tenemos que $k + c + 1$ pertenece a $\mathbb{Z}$, por lo que podemos escribir $a + b = 2 \cdot m$ con $m \in \mathbb{Z}$, que es la definición de un número par. Por lo tanto, queda probado que la suma de dos números impares es un número par.

Estudiar la **paridad** de un número es decidir si ese número es par o impar.

Actividades

35. Simbolizar matemáticamente los siguientes enunciados:
    a) m es la suma de un múltiplo de 5 con un múltiplo de 7.
    b) m es la diferencia entre el cubo de un múltiplo de 3 y el cuadrado de un múltiplo de 5.
    c) m es la suma de dos números impares.
    d) m es el cubo de la suma de dos números pares consecutivos.
36. Determinar la paridad, si es posible, de:
    a) Un número que se obtiene a partir de la suma de dos números pares.
    b) Un número que se obtiene a partir del producto de dos números impares.
    c) El producto de dos números pares.
    d) El cuadrado de un número par.
    e) El cuadrado de un número impar.
37. Determinar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando la respuesta.
    a) La suma entre un múltiplo de 8 y un múltiplo de 4 es un número par.
    b) La diferencia entre el cuadrado de un múltiplo de 10 y el cubo de un múltiplo de 2 es siempre múltiplo de 4.
    c) La suma de un múltiplo de 10 con un múltiplo de 25 es siempre múltiplo de 15.
    d) Si n es par, entonces $4n + 24$ es múltiplo de 8.
    e) Si n es un múltiplo de 3, entonces $2(n + 1)^2 + 4(n + 1)$ es múltiplo de 6.
    f) Si n es impar, entonces $n^2 - 3n + 8$ es impar.

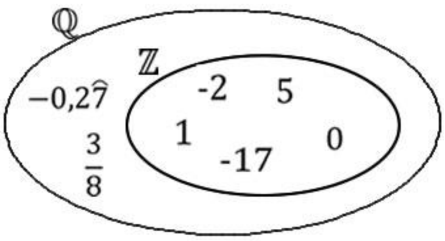
Racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \ / \ m, n \ \in \mathbb{Z}, y \ n \neq 0\right\}$$

¿Qué son números racionales? Podemos empezar por decir que un número racional es una cifra o valor que puede ser expresado como el cociente de dos números enteros donde el divisor es distinto de 0. Es decir que un número racional es un número que se escribe mediante una división de enteros y a esa división se la llama **fracción**.

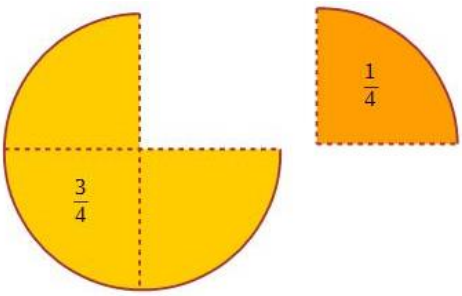
Los números racionales son números fraccionarios, sin embargo, los números enteros también pueden ser expresados como fracción, por lo tanto, también pueden ser tomados como números racionales con el simple hecho de dar un cociente entre el número entero y el número 1 como denominador. Es decir $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

> 3 es racional, ya que $3 = \frac{3}{1}$ con 3 y $1 \in \mathbb{Z}$.

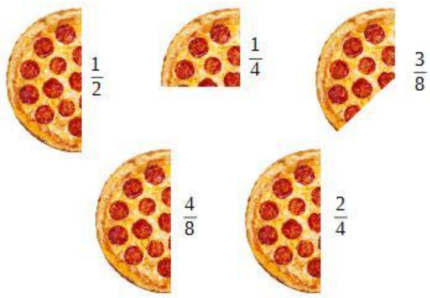


A diferencia de los números enteros que son consecutivos, por ejemplo al 4 le sigue el 5 y a este, a su vez, le sigue el 6, al -9 le sigue el -8 y a este, a su vez, le sigue el -7; en los números racionales no existe el concepto de consecutivo, pues entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

En una fracción $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$, llamaremos **numerador** al número superior de la fracción (en este caso m), e indica el número de partes elegidas, mientras que el **denominador** (en este caso n) indica el número de partes en que se ha dividido la unidad, y tiene que ser distinto de cero.



Fracciones equivalentes



Un número racional puede ser expresado de diferentes maneras, sin alterar su cantidad mediante **fracciones equivalentes**, por ejemplo $\frac{1}{2}$ puede ser expresado como $\frac{2}{4}$ o $\frac{4}{8}$. Por ejemplo, si una pizza está cortada en 8 porciones iguales, es lo mismo decir que comimos 4 porciones de 8, que decir que comimos media pizza.

Para reducir una fracción podemos utilizar el método de simplificación, es decir, sustituir la fracción por otra equivalente más sencilla. Esto se podrá hacer cuando el numerador y el denominador se puedan dividir por un mismo número.

$$\frac{3}{60} = \frac{1}{20} \qquad \text{y} \qquad \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Para simplificar, es conveniente tener en cuenta los criterios de divisibilidad que están en el anexo de este capítulo.

No es necesario que nos esforcemos en hacer una única simplificación directamente. A veces es más fácil hacerla en varios pasos.

$$\overbrace{\frac{180}{120} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{\textit{irreducible}}}^{fracciones\ equivalentes}$$

Cuando una fracción no se puede simplificar más, se dice que es **irreducible** o que está en su **mínima expresión**.

Cuando tenemos una fracción con denominador negativo, es usual cambiar el signo al numerador o directamente delante de la fracción, es decir: $\frac{7}{-3} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$. Otro ejemplo es $\frac{-5}{-8} = \frac{-(-5)}{8} = \frac{5}{8}$.

Operaciones en el conjunto de los números racionales

Suma

Si queremos sumar dos números racionales que en su expresión fraccionaria tienen el mismo denominador, debemos sumar los numeradores.

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$$

De manera genérica,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Para sumar dos números racionales con diferente denominador, trabajaremos con sus expresiones equivalentes, buscando tener el mismo denominador.

Realizar la suma $\frac{1}{5}+\frac{2}{7}$

Si necesitamos sumar $\frac{1}{5}$ *con* $\frac{2}{7}$ *lo que haremos es buscar cuál sería el denominador común.*

Sabemos que el $m.c.m.(5,7)=35$*, entonces, en la primera fracción multiplicamos por* $\frac{7}{7}$ **:**

$$\frac{1}{5}=\frac{1.7}{5.7}=\frac{7}{35}$$

De la misma manera, al 7 *hay que multiplicarlo por* 5 *para obtener* 35*, de donde*

$$\frac{2}{7}=\frac{2.5}{7.5}=\frac{10}{35}$$

Con todo lo anterior,

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{7}=\frac{7}{35}+\frac{10}{35}=\frac{7+10}{35}=\frac{17}{35}$$

Realizar la operación $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

Como el $m.c.m.(4,6)=12$*, entonces*

$$\frac{1}{4}=\frac{1.3}{4.3}=\frac{3}{12}$$

y

$$\frac{5}{6}=\frac{5.2}{6.2}=\frac{10}{12}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{3+10}{12}=\frac{13}{12}$$

De forma genérica, si queremos sumar $\frac{p}{q}$ con $\frac{r}{s}$, donde $m.c.m.(q,s)=d$, nos quedaría

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{\frac{d}{q}.p}{d}+\frac{\frac{d}{s}.r}{d}=\frac{\frac{d}{q}.p+\frac{d}{s}.r}{d}$$

Si bien esta última expresión parece complicada, es importante reconocer que lo que se generaliza es el proceso de buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Cuando estamos trabajando con fracciones numéricas, el procedimiento no es difícil, como se puede observar en el último ejemplo.

Podemos resumir los casos en: Definimos la suma de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ como $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p.s+q.r}{q.s}$, pero recordamos que si $M.C.D.(q,s)\neq 1$, podemos utilizar un denominador más pequeño que $q.s$

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{3}=\frac{2.3+4.7}{7.3}=\frac{34}{21}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{9}=\frac{1.9+4.6}{6.9}=\frac{33}{54}=\frac{11}{18}$$

$$\frac{2}{5}-\frac{5}{9}=\frac{2.9-5.5}{5.9}=-\frac{7}{45}$$

Para la resta de fracciones se trabaja de la misma manera.

Para restar $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ podemos hacer: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2.3-1.5}{5.3}=\frac{1}{15}$

Actividades

38.Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{7}+\frac{10}{7}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{6}{7}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$

d) $2+\frac{3}{5}$

e) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

f) $\frac{7}{8}+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$

g) $\frac{2}{5}-\frac{3}{2}$

h) $-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$

Propiedades de la suma

Las propiedades de la suma que se cumplían en los enteros, siguen cumpliéndose en los números racionales, es decir, dados $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$, son válidas las siguientes propiedades:

- Ley de cierre: la suma de dos números racionales, es otro número racional.
- Propiedad asociativa: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$.
- Propiedad conmutativa: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$
- Existencia de elemento neutro“0”: $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$
- Existencia de inverso aditivo o elemento opuesto: el opuesto de $\frac{a}{b}$ es $-\frac{a}{b}$ de manera que $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$.

$$\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\text{Conmutativa}}=\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}^{\text{Asociativa}}+\underbrace{0}_{\text{Neutro}}=\frac{1+1}{2}+\frac{-3-1}{4}=\underbrace{1-1}_{\text{Opuesto}}=0\in\mathbb{Q}$$

Producto

Si queremos multiplicar dos números racionales, debemos multiplicar el numerador con el numerador, y el denominador con el denominador. Es decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$

Previo a realizar el producto, conviene verificar si es posible simplificar los factores, es decir simplificar un factor de algún numerador con un factor de algún denominador.

$$\frac{3}{5}.\frac{7}{6}=\frac{\cancel{3}}{5}.\frac{7}{\underbrace{\cancel{6}}_{2}}=\frac{1}{5}.\frac{7}{2}=\frac{1.7}{5.2}=\frac{7}{10}$$

Notemos que en el ejemplo anterior, podríamos haber multiplicado directamente $\frac{3}{5}.\frac{7}{6}=\frac{3.7}{5.6}=\frac{21}{30}$ que es equivalente a $\frac{7}{10}$. Al haber simplificado, obtuvimos directamente esta última fracción, que es irreducible.

Actividades

39. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3}.\frac{6}{7}$

b) $\frac{1}{5}.\frac{10}{3}.\frac{6}{5}$

c) $\frac{4}{6}.\frac{3}{16}$

d) $-\frac{7}{11}.\frac{110}{5}$

Propiedades del producto

Para el producto en los racionales, siguen valiendo las propiedades que valían en los enteros, es decir, dados $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$, son válidas las siguientes propiedades:

- Ley de cierre: producto de dos racionales es racional.
- Propiedad asociativa: $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$.
- Propiedad conmutativa: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$
- Existencia del neutro “1”: $\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$

Asociativa

$$\frac{1}{2}.\underbrace{\frac{3}{7}.\frac{6}{5}}_{\downarrow}=\frac{1}{2}.\underbrace{\frac{6}{5}.\frac{3}{7}}_{\downarrow}=\overbrace{\frac{6}{10}}^{\uparrow}.\frac{3}{7}=\underbrace{\frac{18}{70}\in\mathbb{Q}}_{\downarrow}$$

Conmutativa Ley de cierre

Se agrega, además, la siguiente propiedad:

- Existencia del inverso multiplicativo: Dado un racional $\frac{p}{q}$ con $p \neq 0$ y $q \neq 0$ y la definición de producto, existe el racional $\frac{q}{p}$ tal que $\frac{p}{q}.\frac{q}{p} = \frac{p.q}{q.p} = 1$. En otras palabras, cada número racional no nulo admite un inverso multiplicativo.

> El inverso multiplicativo de $\frac{4}{9}$ es $\frac{9}{4}$.

> El inverso multiplicativo $\frac{-3}{5}$ es $\frac{-5}{3}$.

En parte de la bibliografía al inverso multiplicativo se lo conoce como recíproco.

Actividades

40. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{2}{7}.\frac{14}{4}\right).\frac{12}{5}$

b) $-\frac{3}{5}.\left(-\frac{2}{15}.\frac{3}{8}\right)$

c) $\left(\frac{3}{2}.\frac{3}{27}\right).\frac{8}{5}$

d) $\frac{7}{5}.\left(\frac{4}{9}.\frac{5}{7}\right)$

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma

Esta propiedad distributiva sigue valiendo en el conjunto de los números racionales.

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$$

Actividades

41. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3}.\left(\frac{15}{4}+\frac{9}{2}\right)$

b) $-\frac{7}{11}.\left(\frac{22}{3}-\frac{11}{7}\right)$

c) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{15}\right).\frac{10}{3}$

Así como la resta en enteros surgió a partir de que la suma admitía un opuesto, vamos a definir la división en los racionales a partir de la propiedad de que en los racionales existe el inverso multiplicativo.

División

Si queremos dividir dos números racionales, en este caso dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ lo que haremos será multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor, que es $\frac{d}{c}$. Obtenemos así

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}$$

> Si queremos dividir $\frac{1}{7}$ con $\frac{4}{5}$ lo que haremos es
>
> $$\frac{1}{7}:\frac{4}{5} = \frac{1}{7}.\underbrace{\frac{5}{4}}_{\substack{inv.\\ mult.\\ de\frac{4}{5}}} = \frac{1.5}{7.4} = \frac{5}{28}$$

¡Cuidado! Siempre el que cambia por su opuesto multiplicativo al convertirse en producto es el divisor. No es indistinto cuál cambiamos.

Notemos que dados tres números enteros a, b y c con $c \neq 0$, tenemos que

$$(a+b):c=(a+b).\frac{1}{c}=\frac{(a+b)}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

No vale lo mismo cuando la suma está en el denominador, es decir, $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b}+\frac{a}{c}$.

Actividades

42.Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{4}:\frac{5}{12}$

b) $-\frac{11}{2}:\frac{22}{6}$

c) $\frac{3}{7}:\left(-\frac{1}{21}\right)$

d) $\frac{9}{13}:\frac{3}{26}$

43.Calcular

a) $\frac{5}{(3+2)}+\frac{3+2}{5}$

b) $\frac{5\cdot 3}{(3+2)}+\left(\frac{3+2}{5}\right):\frac{1}{3}$

c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$

d) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$

e) $\dfrac{2-4.\left(3+\frac{5}{2}\right)}{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}.(8-6)}$

Propiedades de la potencia con base racional y exponente natural

En el caso de un número racional con potencia natural, se mantienen las propiedades de la potencia que definimos en el conjunto de los números enteros.

Se agrega, además, la siguiente propiedad:

Si $\frac{p}{q}$ es un número racional, y n natural, $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p}{q}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{p \ldots\ldots p}{q \ldots\ldots q} = \frac{p^n}{q^n}$ por lo tanto

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$$

Es decir, la potencia es distributiva con respecto al cociente.

$$\left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{2^5}{7^5}$$

Propiedades de la potencia con base en los racionales y exponente entero

Sabemos que para todo $a \neq 0$ podemos escribir al número 1 como $1 = a.\frac{1}{a}$. Además, tenemos que $a^0 = 1$, con lo cual $a^0 = a.\frac{1}{a} = a^1.\frac{1}{a}$. Si queremos determinar si la expresión $\frac{1}{a}$ es alguna potencia de a que desconocemos, entonces, llamemos n a esa potencia y asumamos como válidas todas las propiedades vistas hasta ahora. Es decir, $\frac{1}{a} = a^n$ para cierto n que queremos averiguar. Entonces, $a^0 = a.\frac{1}{a} = a^1.\frac{1}{a} = a^1.a^n = a^{1+n}$.

Esto implica que $a^0 = a^{n+1}$, de donde $0 = n + 1$ o $n = -1$. De esto deducimos que: $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Entonces, como $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de a, tenemos que a^{-1} es el inverso multiplicativo de a.

La introducción de un inverso multiplicativo nos permite definir potencias negativas.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

La definición de a^{-1} nos permite calcular potencias enteras. Para calcular a^{-n} pensemos lo siguiente:

$$a^{-n} = a^{(-1).n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

De esta manera, se aplican las propiedades ya vistas hasta el momento a un conjunto más amplio: potencias de base racional y exponente entero.

Separación en términos

En forma equivalente a lo visto con los números naturales, cuando tengamos cálculos que realizar, debemos seguir el siguiente orden:

- Separar en términos
- Operar y resolver cada término
- Realizar las sumas y restas

Actividades

44. Expresar en forma de una sola potencia:

a) $z^4.z^6$

b) $a^7 : a^4$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5.\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}.\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

d) $(3^{-5}.3^{-2})^{-6} : [(5-2)^2]^{-7}$

e) $[(3+\pi)^6 : (3+\pi)^{-2}]^5$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$

45. Expresar $(a^3.b^2)^{-2}$ como producto de potencias de a y de b.

46. Transformar las siguientes potencias para que tengan exponente positivo

a) $\left(\frac{9}{4x}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{-3}$

47. Operar y resolver utilizando propiedades:

a) $(6.5^3 + 20.5^2 - 25.5) : \frac{5^5}{5^2}$

b) $[14.7^3 + 2.7^4 + 3.49.7^2].(7^{-1})^5$

c) $\frac{2^3.2^7.2^{-3}.2^5}{2^4.2^6.2^{-2}.2^9}$

d) $\frac{2^3.3^5.5^2.11}{2^2.3^3.5^2.7}$

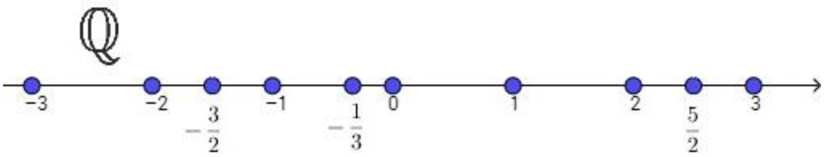
48. Operar y resolver utilizando propiedades:

a) $(5.4^{n+1} - 12.4^n - 48.4^{n-1}) : 4^n$

b) $(2.5^{3n+4} + 14.5^{3n+3} + 15.5^{3n+2}).\left(\frac{5^{-(n+1)}}{3}\right)^3$

c) $\frac{10.4^n + 5.2^{2n+1}}{7.2^{2n} - 6.2^{2n-1}}$

Orden y recta numérica



Se puede establecer un orden en el conjunto de los números racionales, es decir, dados dos números racionales, se puede determinar cuál es más grande, o si son iguales.

Si queremos comparar dos fracciones, podemos hacerlo a simple vista en muchos casos. Por ejemplo, una fracción positiva será siempre mayor que una negativa; o, en el caso de dos fracciones que tengan el mismo denominador, será mayor aquella cuyo numerador sea mayor; etc.

Cuando queramos comparar fracciones en general, es aconsejable comparar las fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador ya que, en este caso, será el orden del numerador el que establezca cuál de los números racionales será mayor o menor que el otro.

Si tenemos $\frac{13}{24}$ *y* $\frac{5}{9}$ *¿cuál es mayor?*

El $m.c.m.(24,9) = 72$ *(ya que* $24 = 2^3.3$ *y* $9 = 3^2$ *). Entonces, buscamos las fracciones equivalentes*

$$\frac{13}{24} = \frac{13.3}{24.3} = \frac{39}{72} \quad y \quad \frac{5}{9} = \frac{5.8}{9.8} = \frac{40}{72}$$

De donde podemos deducir que $\frac{13}{24} = \frac{39}{72} < \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$

Otra manera de comparar fracciones es aplicando el siguiente principio:

$$a \leq b \text{ si y solo si } b - a \geq 0$$

Así, para el mismo ejemplo, podríamos hacer

$$\frac{13}{24} - \frac{5}{9} = \frac{13.3 - 8.5}{72} = \frac{39 - 40}{72} = -\frac{1}{72}$$

y como el resultado es negativo, entonces $\frac{13}{24} < \frac{5}{9}$.

Actividades

49. Comparar las siguientes fracciones:

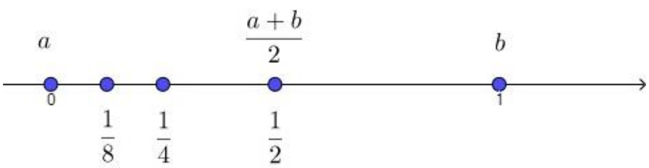
a) $\frac{11}{30}$ y $\frac{7}{20}$ b) $\frac{5}{16}$ y $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{12}$

50. Trabajando con números fraccionarios, ordenar de forma creciente los siguientes números. Justificar con fracciones equivalentes.

a) $\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$; -1 ; 2 ; $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{1}; \frac{2}{3}; \frac{9}{3}; \frac{4}{8}; \frac{6}{6}; \frac{12}{1000}$

Densidad de $\mathbb{Q}$

Hasta ahora, entre dos números enteros consecutivos de la recta numérica no hay ningún otro número entero. Ahora, tomemos el 0 y el 1, y notemos que $\frac{1}{2}$ está entre ellos y es el punto medio del segmento que une ambos puntos. Ahora el $\frac{1}{4}$, estará entre el 0 y el $\frac{1}{2}$. El $\frac{1}{8}$ estará entre el 0 y el $\frac{1}{4}$ y así sucesivamente. Lo mismo podemos hacer entre dos números racionales cualesquiera.



Es más, si consideremos dos racionales cualesquiera a y b, el punto medio entre a y b lo podemos calcular como $\frac{a+b}{2}$ y es un número que se ubica en la mitad del segmento que une a con b. Por la Ley de cierre, este número es racional, por lo que podemos afirmar que entre dos racionales cualesquiera hay al menos un racional.

La consecuencia de construir los puntos medios entre dos números racionales dados no tiene fin, ya que siempre puedo calcularlos, independientemente de cuán cerca estén los números en cuestión. Esta propiedad se conoce como densidad en la recta numérica. Es decir: para cualquier par de números racionales existe otro número racional situado entre ellos en la recta real.

Actividades

51. Calcular qué fracción de la unidad representa:
    a) La mitad.
    b) La mitad de la mitad.
    c) La tercera parte de la mitad.
    d) La mitad de la cuarta parte.
52. Ubicar a los números 1 y 6 sobre la recta numérica.
    a) ¿Cuál es el punto medio? Ubicarlo en la recta.
    b) Encontrar el punto medio entre 1 y $\frac{7}{2}$. ¿Este es un número racional? Ubicarlo en la recta.
    c) Encontrar el punto medio entre $\frac{9}{4}$ y $\frac{7}{2}$. ¿Este es un número racional? Ubicarlo en la recta.
    d) Encontrar el punto medio entre $\frac{9}{4}$ y $\frac{23}{8}$. ¿Este es un número racional? Ubicarlo en la recta.

    ¿Se podría continuar este procedimiento? ¿Cuántas veces?

Expresión decimal de un número racional

Todo número racional puede ser representado como fracción y como número decimal.

La parte **entera** de un número racional corresponde a las cifras de la izquierda de una coma (o punto en calculadoras o computadoras) y es un número entero, y la parte **decimal** o fraccionaria corresponde a las cifras posteriores o a la derecha de la coma.

Los números decimales se clasifican en tres grandes grupos: **exactos**, con la parte decimal finita, **periódicos**, que se subdividen en periódicos puros y periódicos mixtos dependiendo de la repetición de sus números, y **no periódicos**, que son aquellos números con la parte decimal infinita y no periódica (estos últimos son los números irracionales que se estudiarán en la próxima sección).

Los decimales **periódicos puros** son los números en los que la parte decimal se repite periódicamente, inmediatamente después de la coma. Y los decimales **periódicos mixtos** son los números en cuya parte decimal hay una parte no periódica y otra periódica.

> $\frac{1}{8} = 0{,}125$ (Número racional con parte decimal finita)
>
> $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0,\hat{3}$ (Número racional con expresión decimal periódica pura)
>
> $\frac{111}{90} = 1{,}233333\ldots = 1{,}2\hat{3}$ (Número racional con expresión decimal periódica mixta)

En resumen

$$\left.\begin{array}{l} \text{Entero} \\ \text{Decimal}\begin{cases}\text{Exacto}\\ \text{Periódico}\begin{cases}\text{Puro}\\ \text{Mixto}\end{cases}\\ \text{No periódico}\end{cases}\end{array}\right\}\text{Número Racional}$$

Cifras decimales

Décima	→	$10^{-1} = 0{,}1$
Centésima	→	$100^{-1} = 0{,}01$
Milésima	→	$1000^{-1} = 0{,}001$

Obtener la expresión fraccionaria de un número decimal exacto es sencillo. Basta con multiplicar y dividir por la misma potencia de 10 (el exponente está relacionado con la cantidad de dígitos que hay después de la coma) y, luego, ver si se puede simplificar la expresión.

$$4{,}5 = 4{,}5 \,.\, \frac{10}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}$$

$$1{,}24 = 1{,}24 \,.\, \frac{100}{100} = \frac{124}{100} = \frac{31}{25}$$

Tanto los números decimales periódicos puros como los decimales periódicos mixtos siempre pueden ser expresados en forma de fracción y para ellos veremos un método que se aplica para todos los casos. Veamos primero algunos ejemplos:

Caso 1: Periódico puro $1{,}3333\ldots$

Llamemos $n = 1,\hat{3}$. Multiplicando por 10 a ambos miembros y luego le restaremos a la nueva expresión, la expresión que teníamos anteriormente. Entonces

$$n = 1,\hat{3}$$
$$10.n = 13,\hat{3}$$
$$10.n - n = 13,\hat{3} - 1,\hat{3}$$
$$9.n = 12$$
$$n = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Caso 2: $0{,}5252525252\ldots$

Llamemos $n = 0,\widehat{52}$. Como hay dos dígitos dentro de la parte periódica, multiplicaremos en este caso por 10^2 para, así, obtener la misma parte periódica después de la coma, y luego operamos de manera similar al ejemplo anterior. Tenemos entonces

$$n = 0,\widehat{52}$$
$$100.n = 52,\widehat{52}$$
$$100n - n = 52,\widehat{52} - 0,\widehat{52}$$
$$99n = 52$$
$$n = \frac{52}{99}$$

Caso 3: Periódico mixto $0{,}23333\ldots$

Llamemos $n = 0{,}2\hat{3}$. En este caso, primero multiplicaremos por 10 a ambos miembros, para que nos quede así un periódico puro (la coma pegada al período), y luego seguiremos trabajando como en los ejemplos anteriores.

Entonces

$$n = 0{,}2\hat{3}$$
$$10n = 2,\hat{3}$$
$$100n = 23,\hat{3}$$
$$100n - 10n = 23,\hat{3} - 2,\hat{3}$$
$$90n = 21$$
$$n = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

Resumiendo los pasos:

1. Multiplicamos ambos miembros por potencias de 10, en caso de ser necesario, hasta que la coma esté inmediatamente delante del período.
2. Multiplicamos ambos miembros por potencias de 10, para obtener un número con la misma parte periódica que el que teníamos en el paso anterior.
3. Restamos las expresiones obtenidas logrando que nos queden números enteros
4. Dividimos ambos miembros de la igualdad obtenida por la constante que multiplica al n y obtenemos así la fracción buscada. En caso de ser posible, simplificamos la expresión obtenida.

Actividades

53. Escribir los siguientes números en su expresión fraccionaria

a) $0,\hat{7}$ b) $3,\widehat{42}$ c) $2,1\hat{3}$ d) $3,\hat{9}$

e) $1,2\widehat{35}$ f) $0,2\hat{3}$ g) $0,\widehat{23}$

54. Trabajando con números fraccionarios, ordenar de forma creciente los siguientes números. Justificar con fracciones equivalentes.

a) $\frac{4}{33}$; $0,\hat{3}$; $\frac{13}{99}$

b) $2,4\hat{9}$; $-\frac{49}{20}$; $\frac{67}{26}$

55. Escribir el número $0,\hat{9}$ en su expresión fraccionaria y responder:

a) ¿Qué número es más grande: $0,\hat{9}$ o 1?

b) ¿Es posible encontrar un número racional entre $0,\hat{9}$ y 1?

Simbolización matemática de expresiones con números racionales

Retomando la modelización estudiada con los números naturales y enteros, ahora analizaremos situaciones que involucran expresiones racionales.

Hallar una expresión que permita simbolizar las siguientes situaciones:

- *"Dado un número racional, consideremos la tercera parte de su cuadrado, más* 2*."*

En este caso, utilizamos la variable l *para describir el número racional buscado. Como se pide la tercera parte de su cuadrado, al número primero se lo eleva al cuadrado y luego se lo divide por* 3*, es decir* $\frac{l^2}{3}$*. Por último, le sumamos dos unidades, obteniendo entonces la siguiente expresión*

$$\frac{l^2}{3} + 2 \text{ con } l \in \mathbb{Q}.$$

- *"El nuevo precio de un LCD que sufre un aumento de la cuarta parte de su valor inicial."*

Definimos p *como el precio inicial del LCD y* m *como el precio final del mismo. Al tener un aumento de la cuarta parte de su valor inicial, le sumamos* $\frac{1}{4}$ *de* p *al precio original, de donde tenemos que*

$$m = p + \frac{1}{4}p.$$

Esta misma expresión se puede expresar como $m = p\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}p$*.*

- *“La suma de un número entero y su anterior, al cuadrado.”*

Llamaremos n *al número entero, con lo cual su anterior será* $n-1$*. Notemos que la coma después de la palabra anterior nos dice que primero hay que realizar la suma, y luego elevar a la misma al cuadrado. Expresamos entonces al enunciado como*

$$(n+n-1)^2.$$

- *“La suma de un número entero y su anterior al cuadrado.”*

A diferencia del caso anterior, no hay una coma, por lo que la frase al cuadrado solo afecta al concepto de anterior. Es decir, si nuevamente llamamos n *al número entero en cuestión, y* $n-1$ *a su anterior, tenemos que la situación planteada queda expresada como:*

$$n+(n-1)^2.$$

Porcentaje

El concepto matemático porcentaje se emplea con mucha frecuencia en todo tipo de operaciones cotidianas, como hacer compras, calcular el descuento de un producto o realizar algún cálculo contable.

El símbolo matemático del porcentaje es $\%$ y siempre acompaña a una cantidad numérica: 5%, 10%, 13%.... En el lenguaje corriente, “porcentaje” equivale a tanto por ciento. Hay que tener en cuenta que porcentaje hace referencia a una cantidad, concretamente 100, puesto que el porcentaje de una cantidad con respecto a otra quiere decir que de cada 100 partes nos referimos a una cantidad determinada. Por ejemplo, el 2% de pulpa de naranja en un jugo serían dos partes de pulpa de naranja cada 100 partes del jugo.

La cantidad indicada en un porcentaje siempre tiene relación con otra cantidad, pues se trata de calcular el porcentaje de una cosa con respecto a otra. No puede decirse 30% y no especificar respecto a qué cantidad se refiere. De esta manera, necesitamos saber el 10% de 7000 o el 4% de 500.

En el segundo ejemplo de simbolización sobre el precio de un LCD, se introdujo la noción de aumento en determinada proporción de una cierta cantidad. Vimos, para un caso particular, que si una cantidad a aumentaba una fracción $\frac{p}{q}$ de la misma, el valor resultante era $a\left(1+\frac{p}{q}\right)$.

Si consideramos que $\frac{1}{2}$ es la mitad de uno, podemos expresarlo de manera equivalente a $\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{50}{100}$. El $\frac{50}{100}$ de una cantidad a, calculado a través de $\frac{50}{100}\cdot a$ es la mitad de a y se denomina 50 por ciento de a y también se dice que es el 50% de a. Decir que queremos calcular el 20% de a debemos hacer $\frac{20}{100}.a$

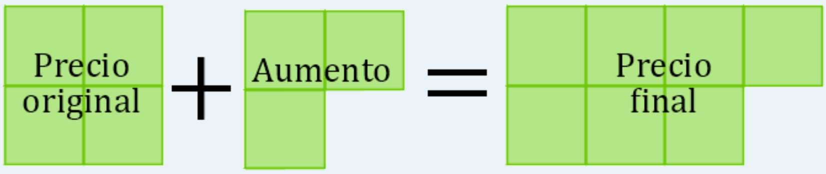
Sea c un número positivo. Consideremos una cantidad a que sufre un <u>aumento</u> del $c\%$. En este caso, el nuevo valor de a es

$$a+\frac{c}{100}a \;=\; a\left(1+\frac{c}{100}\right)$$

Si, en cambio, se trata de un <u>descuento</u> del $c\%$, tendremos

$$a-\frac{c}{100}\,a \;=\; a\left(1-\frac{c}{100}\right)$$

> Si tenemos un producto que sale $\$140$ y sufre un 75% de aumento, podemos calcular cuánto es el aumento del siguiente modo:
>
> $$\frac{75}{100}.140=\frac{3}{4}.140=\frac{3.140}{4}=105$$
>
> Es decir, que debemos pagar $\$140+\$105=\$245$.
>
> Gráficamente, tenemos la siguiente situación (considerando que el 75% son $\frac{3}{4}$ del total):



Es decir, que tendremos que pagar una vez y $\frac{3}{4}$ el precio original. Si queremos ahora calcular el precio final, tenemos:

$$Precio\ final = Precio\ original + \frac{3}{4}.precio\ original$$

Sacando factor común tenemos

$$Precio\ final = \left(1 + \frac{3}{4}\right).precio\ original$$

$$Precio\ final = \frac{7}{4}.precio\ original$$

Si ahora reemplazamos el precio original por $\$140$, obtenemos

$$Precio\ final = \frac{7}{4}.\$140 = \$245$$

Consideremos dos aumentos consecutivos de una cantidad a en porcentajes $c_1\%$ y $c_2\%$, respectivamente. Cuando se trata de aumentos sucesivos, se entenderá que el segundo aumento se realiza sobre el valor correspondiente a la cantidad que ya sufrió el primer aumento. Entonces, la cantidad a se transforma luego del primer aumento en

$$a + \frac{c_1}{100}a \ = \ a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)$$

Esta nueva cantidad es la que sufre el segundo aumento, con lo cual, $a + \frac{c_1}{100}a$ es aumentada en $\frac{c_2}{100}$ veces de ese valor, con lo que tenemos que, luego del segundo aumento, el precio resulta ser

$$\left[a + \frac{c_1}{100}\ a\right] + \frac{c_2}{100}\left[a + \frac{c_1}{100}a\right]$$

Lo que está entre corchetes puede ser escrito como factor común, de modo que podemos escribir los aumentos consecutivos como

$$a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)\left(1 + \frac{c_2}{100}\right)$$

Si quisiéramos ver cuál sería el aumento equivalente, es decir el aumento que debería haber sufrido para que el resultado sea el mismo que los dos aumentos consecutivos, deberíamos igualar

$$a\left(1 + \frac{c_1}{100}\right)\left(1 + \frac{c_2}{100}\right) \ = \ a\left(1 + \frac{c}{100}\right)$$

Si tenemos un producto con una valor original de $\$150$ y tuvo un aumento del 30% y luego un aumento del 10%, podemos calcular su precio final (P_F) viendo cuánto cuesta después de cada aumento.

Sabemos que después del primer aumento cuesta

$$150+\frac{30}{100}.150=150+45=195.$$

Si se le aplica el segundo aumento ahora pasará a costar

$$P_F=195+\frac{10}{100}.195=195+19{,}5=214{,}5$$

Por lo tanto, el precio final es $\$214{,}5$.

Este mismo resultado lo obtenemos si planteamos los aumentos consecutivos simultáneamente:

$$P_F=\left(150+\frac{30}{100}.150\right)+\frac{10}{100}.\left(150+\frac{30}{100}.150\right)$$

$$P_F=150.\left(1+\frac{30}{100}\right)+\frac{10}{100}.150.\left(1+\frac{30}{100}\right)$$

$$P_F=150.\left(1+\frac{30}{100}\right).\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

$$P_F=150.\frac{130}{100}.\frac{110}{100}=214{,}5$$

En el caso de los descuentos sucesivos, notemos que tener dos descuentos sucesivos del 50% no significa que algo salga gratis, ya que el segundo descuento es sobre la mitad del valor original. Si hacemos un análisis similar al anterior, podemos ver que si una cantidad a sufre dos descuentos consecutivos del $c_1\%$ y $c_2\%$, el valor final será

$$a\left(1-\frac{c_1}{100}\right)\left(1-\frac{c_2}{100}\right)=a\left(1-\frac{c}{100}\right).$$

Observar que la aplicación de aumentos y/o descuentos consecutivos es conmutativa, o sea, que es lo mismo primero aplicar un aumento del 5% a una cierta cantidad y luego un descuento del 10% al resultado anterior, que primero hacer un descuento del 10% y luego aplicar un aumento del 5% del valor obtenido, ya que tenemos

$$a\left(1+\frac{5}{100}\right).\left(1-\frac{10}{100}\right)=a\left(1-\frac{10}{100}\right).\left(1+\frac{5}{100}\right).$$

Si tenemos un producto que cuesta $\$2500$ y sufre dos descuentos consecutivos del 10%, su precio final es

$$2500.\left(1-\frac{10}{100}\right).\left(1-\frac{10}{100}\right)=2500.\frac{9}{10}.\frac{9}{10}=2025$$

es decir, que costará $\$2025$.

Al plantear problemas con porcentajes, muchas veces se utilizan ecuaciones sencillas para resolverlos. En este material se estudiarán con detalle las ecuaciones, propiedades y métodos de resolución en el capítulo 2.

Si sabemos que un producto sufrió un aumento del 12% *y luego un descuento del* 10% *y en la actualidad cuesta* $\$1890$, *¿cuál era su precio inicial?*

Para resolver este problema, llamaremos P *al precio inicial del producto. Si tuvo un aumento del* 12% *y luego un descuento del* 10%, *sabemos que luego de ambas modificaciones su precio era*

$$\left(P+\frac{12}{100}.P\right)-\frac{10}{100}.\left(P+\frac{12}{100}.P\right)=1890$$

De donde podemos sacar P *en ambos términos como factor común*

$$P.\left(1+\frac{12}{100}\right)-\frac{10}{100}.P.\left(1+\frac{12}{100}\right)=1890$$

Y luego sacar $P.\left(1+\frac{12}{100}\right)$ *como factor común y operar con las fracciones para obtener*

$$P.\left(1+\frac{12}{100}\right).\left(1-\frac{10}{100}\right)=1890$$

$$P.\frac{112}{100}.\frac{90}{100}=1890$$

$$P.\frac{28}{25}.\frac{9}{10}=1890$$

$$P.\frac{252}{250}=1890$$

Si operamos tenemos

$$P=1890\,.\frac{250}{252}=1875$$

Es decir, que el precio inicial era $\$1875$.

Si volvemos al ejemplo del producto que costaba $\$150$ y después de dos aumentos consecutivos del 30% y del 10% pasó a costar $\$214{,}5$, podríamos querer saber cuánto fue su porcentaje de aumento total (que denotaremos por la variable x). Esto se puede expresar como:

$$150+\frac{x}{100}.150=214{,}5$$

$$\frac{x}{100}.150=214{,}5-150$$

$$\frac{x.150}{100}=64{,}5$$

$$\frac{x.3}{2}=64{,}5$$

$$x=64{,}5.\frac{2}{3}$$

$$x=43$$

Por lo tanto, podemos concluir que en total tuvo un 43% de aumento con respecto al precio original.

Los problemas de porcentajes no solamente se plantean para el caso de precios, sino que tienen muchas otras aplicaciones, como se puede ver en el siguiente ejemplo, donde se presenta una aplicación geométrica.

Si el perímetro de una circunferencia se duplica, calcular el porcentaje de aumento del área.

Para resolver este problema, definiremos las variables con las que trabajaremos:

$$P = perímetro\ de\ la\ circunferencia\ original$$
$$P' = perímetro\ de\ la\ circunferencia\ más\ grande$$
$$A = área\ del\ círculo\ original$$
$$A' = área\ del\ círculo\ más\ grande$$
$$x = porcentaje\ de\ aumento$$

Recordemos que si r es el radio de la circunferencia original, el perímetro se calcula como $P = 2.\pi.r$, de lo que deducimos que $r = \frac{P}{2.\pi}$.

Por otro lado, tenemos que $A = \pi.r^2$. Si reemplazamos r por $\frac{P}{2.\pi}$ tenemos que

$$A = \pi.\left(\frac{P}{2.\pi}\right)^2 = \frac{P^2}{4.\pi}$$

Si hacemos el mismo razonamiento con el área y el perímetro de la circunferencia más grande, tenemos

$$A' = \frac{P'^2}{4.\pi}$$

Y sabemos que $P' = 2P$, por lo que tenemos que

$$A' = \frac{(2P)^2}{4.\pi} = \frac{4P^2}{4.\pi} = 4.\frac{P^2}{4.\pi}$$

Si en esta última ecuación reemplazamos $\frac{P^2}{4.\pi}$ por A, tenemos que $A' = 4.A$

Por lo tanto, tenemos que el área se cuadriplica. Nos queda por calcular qué porcentaje de aumento representa. Para esto, recordemos que x representa el porcentaje de aumento, entonces podemos plantear

$$A' = A + \frac{x}{100}.A = \left(1 + \frac{x}{100}\right).A$$

Si en esta ecuación reemplazamos A' por $4.A$ tenemos

$$4.A = \left(1 + \frac{x}{100}\right).A$$

Es decir, que

$$4 = 1 + \frac{x}{100}$$
$$4 - 1 = \frac{x}{100}$$
$$3.100 = x$$
$$300 = x$$

Por lo tanto tuvo un 300% de aumento.

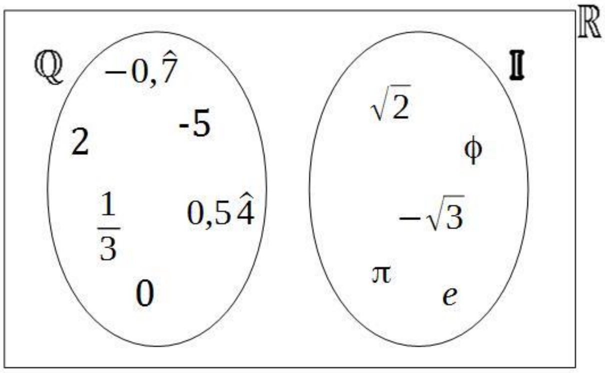
Actividades

56. Considerar una cierta cantidad A. Escribir las expresiones de B correspondientes a las siguientes situaciones:
   a) B es la mitad de A.
   b) B es la tercera parte de A, más 5.
   c) B es el 25% del triple de A.
   d) B se obtiene a partir de A adicionando un 30%.
   e) B se obtiene a partir de A aumentado en un 10% primero y un 20% después.
   f) B se obtiene a partir de A restando un 30%.
   g) B se obtiene a partir de A restando en un 10% primero y un 20% después.
   h) B se obtiene a partir de A aplicando tres aumentos consecutivos del 10%.
   i) B se obtiene a partir de A aplicando n aumentos consecutivos del 10%.
57. Un producto sufre dos aumentos consecutivos del 5% y del 10%, respectivamente. Luego sufre un descuento del 12%. ¿En cuánto se modificó el valor original? ¿Cuál es el porcentaje de aumento que sufrió?
58. ¿Cuál es el costo final de una moto que inicialmente valía 90000 pesos si se otorga un descuento del 5% y se le aplica el 9% de impuestos a las ventas? ¿El aumento que tuvo la moto fue del 4%?
59. Sea T el precio de una tablet. En el mes de mayo aumenta un 20% su valor y en septiembre sufre un descuento. Luego de estas dos modificaciones, el precio del producto es $\frac{4}{5}$ del precio original T. Encontrar el porcentaje de descuento que se hizo en septiembre.
60. Pedro averiguó por una salida en lancha a Tigre. El valor de la excursión es de $\$2500$, como contrata el paquete con almuerzo y merienda, se incrementa un 10%, pero como va en grupo, le aplican un descuento del 20%.
   a) ¿Cuál es el costo final del paseo?
   b) ¿Qué porcentaje de variación tuvo con respecto al valor original?
61. Si un producto ha sufrido un aumento del 20% y luego un descuento del 10% y hoy cuesta $\$432$:
   a) ¿Cuál era su precio original?
   b) ¿Cuál es el porcentaje de aumento o de disminución?

Reales

El conjunto de los números reales incluye a los conjuntos numéricos que estudiamos antes: los naturales, enteros y racionales (que se pueden agrupar en el conjunto de racionales $\mathbb{Q}$), a los que se agrega otro conjunto, que llamaremos $\mathbb{I}$, de números irracionales. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I} = (-\infty, \infty).$$



Notemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos disjuntos, es decir que no hay ningún número que sea, a la vez, racional e irracional.

Conjunto de números irracionales

Los números irracionales se definen como aquellos números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, y por lo tanto, no pueden ser expresados como fracciones. El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de **números irracionales**, a partir del estudio de las longitudes de los lados de un triángulo. Posteriormente, fue llamado irracional, por no poder ser escrito como una razón o fracción. Notaremos con la letra $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales.

Ejemplos de números irracionales son:

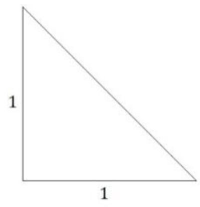
$$\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$$

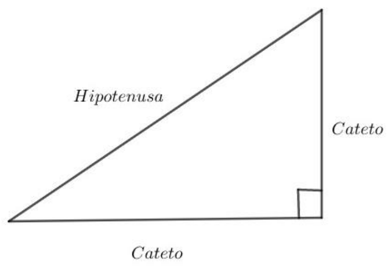
$$\sqrt{11} - \sqrt{3} = 1{,}5845739828\ldots$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749\ldots$$ [3]

[3] El número áureo o número de oro, representado por la letra griega Φ (fi) en honor al escultor griego Fidias, que participó en la construcción del Partenón de Atenas donde se utilizó esta proporción, es un número irracional que aparece regularmente en la arquitectura, en la naturaleza, en el arte y en objetos de uso cotidiano.

Si pensamos en un triángulo rectángulo con lados de longitud 1, como el de la figura, debemos recordar el Teorema de Pitágoras, para calcular el lado faltante:



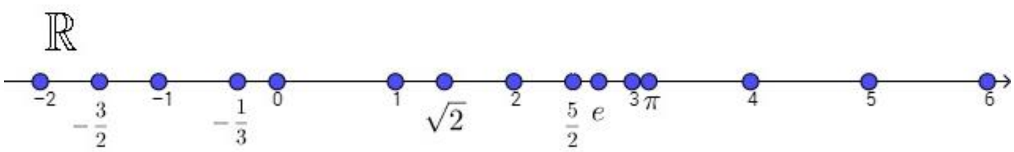


El **Teorema de Pitágoras** es uno de los teoremas más conocidos en matemática. Se aplica en triángulos rectángulos, es decir, aquellos triángulos con un ángulo recto. Al lado opuesto a ese ángulo de lo llama hipotenusa y a los dos lados restantes catetos.

> Teorema de Pitágoras:
>
> En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
>
> Pitágoras - Siglo V AC

Volviendo al ejemplo anterior de calcular la hipotenusa h de un triángulo rectángulo cuyos catetos valen 1 y aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos que $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ es decir que debe existir algún número cuyo cuadrado sea 2. Este número buscado no pertenece a ninguno de los conjuntos numéricos estudiados hasta ahora y es $\sqrt{2}$, que es un número irracional (en el anexo del capítulo 1 se demuestra por qué lo es y cómo graficar algunos números irracionales).

Ahora que tenemos definidos los números irracionales, definimos los **Números Reales**, como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Denotamos con $\mathbb{R}$ a este conjunto. Ahora nos queda completa la recta real, es decir, en la recta numérica, cualquier valor que se tome es real, ya sea racional o irracional.



El conjunto de los números reales también es un conjunto totalmente ordenado, puesto que se puede determinar que entre dos reales diferentes, uno es mayor que el otro. Al representarse en la recta, es posible ordenar a los números reales siguiendo el mismo orden que el establecido en el conjunto de los números racionales.

Dados dos números reales a y b, diremos que b es mayor que a si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, b queda situado a la derecha de a o si $b - a > 0$.

Operaciones en el conjunto de los números reales

Propiedades de la suma, el producto y la potencia en $\mathbb{R}$

En el conjunto de los números reales son válidas las mismas propiedades que estudiamos en los conjuntos anteriores para la suma, el producto y la potencia.

Dados a, b y c números reales y m y n números racionales, tenemos las siguientes propiedades:

Propiedades para la suma:

- Ley de cierre: La suma de números reales es real.
- Conmutativa: $a + b = b + a$
- Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existencia del elemento neutro "0": $a + 0 = a$
- Existencia del opuesto: $a + (-a) = 0$

Propiedades para el producto:

- Ley de cierre: El producto de números reales es real.
- Conmutativa: $a.b = b.a$
- Asociativa: $(a.b).c = a.(b.c)$
- Existencia del elemento neutro "1": $a.1 = a$
- Existencia del inverso (para $a \neq 0$): $a.\frac{1}{a} = 1$

Propiedades para la potencia:

- $a^0 = 1$.
- $a^1 = a$.
- $a^m.a^n = a^{m+n}$.
- $a^m : a^n = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m.n}$.
- $a^n.b^n = (a.b)^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

El conjunto de los números irracionales no es cerrado con la suma ni con el producto, es decir, no cumple la ley de cierre para estas operaciones. Por ejemplo $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son números irracionales, pero $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ y $\sqrt{2}.(-\sqrt{2}) = -2$ y tanto 0 como -2 son números racionales.

Radicación

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Dados dos números, llamados **radicando** e **índice**, la radicación consiste en encontrar un número, llamado **raíz**, de manera que la raíz elevada al índice sea igual al radicando:

$$\sqrt[\text{índice}]{\text{Radicando}} = \text{Raíz} \quad \text{entonces} \quad \text{Raíz}^{\text{índice}} = \text{Radicando}$$

En la raíz cuadrada el índice es 2, es decir, $\sqrt[2]{a}$ es lo mismo que escribir $\sqrt{a}$ aunque en este caso el índice se omite escribirlo.

Calcular la raíz cuadrada de un número $b \geq 0$ consiste en encontrar un número real positivo a tal que su cuadrado sea el radicando b:

$$\sqrt{b} = a \quad \leftrightarrow \quad a^2 = b.$$

Si $b = 0$ entonces $a = 0$.

$\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 4$

$\sqrt{81} = 9$ ya que $9^2 = 81$

En general, si el signo de a es desconocido, y queremos hallar un número b, tal que

$$a^2 = b \text{ entonces } \sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Raíz enésima de un número real

Queremos generalizar lo visto con la raíz cuadrada para raíces de otros índices. Tenemos diferentes casos de acuerdo la paridad del índice y el signo del radicando.

- Raíces de índice par:

Las raíces de índice par se definen de forma similar a las raíces cuadradas. La raíz con índice par de un número positivo es solo el valor positivo.

El número 81 es el resultado de elevar a la cuarta potencia el número 3. Así el número 3 es la raíz cuarta de 81, es decir, $\sqrt[4]{81} = 3$.
Aunque $(-3)^4$ también es 81, no consideramos que $\sqrt[4]{81}$ sea -3, ya que por definición debe ser un número positivo. En cambio, $-\sqrt[4]{81} = -3$.

Si el radicando es negativo, no existe raíz real con índice par, puesto que ningún número real elevado a una potencia par puede ser un número negativo.

$\sqrt{-25}$ no pertenece a los reales.

$\sqrt[6]{-64}$ no pertenece a los reales.

- Las raíces de índice impar:

Se definen de forma similar a las raíces de índice par, con la consideración de que el radicando sí puede ser negativo y, en ese caso, la raíz también es negativa.

> El número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así, el número 5 es la raíz cúbica de 125, esto es $\sqrt[3]{125} = 5$. El número -125 es el resultado de elevar al cubo al número -5. Así, el número -5 es la raíz cúbica de -125, es decir, $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Signo de la raíz: Para averiguar cuál es el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice.

Raíces				
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	$+$	$-$	$+$	$-$
Cantidad de raíces	Una	Una	Una	Ninguna
Signo de las raíces reales	Signo $+$	Signo $-$	Signo $+$	
Ejemplos	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[4]{16} = 2$	$\sqrt[4]{-16}$ No existe en $\mathbb{R}$

Podemos concluir:

- ✓ Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- ✓ Si el índice es par y el radicando es positivo, existe una raíz real que es positiva.
- ✓ Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Supongamos que tenemos que calcular $\sqrt[6]{(-2)^6}$. Una forma de hacerlo sería calcular primero la potencia 6 de (-2) y luego la raíz sexta del resultado. Tendríamos, entonces, que $\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2$. Otra manera sería tratar de simplificar el índice de la raíz con el de la potencia, pero tenemos que tener cuidado ya que sabemos que las raíces pares son positivas, entonces lo que deberíamos hacer es

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[\cancel{6}]{(-2)^{\cancel{6}}} = |-2| = 2$$

En general, tenemos el siguiente resultado

> Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y si n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$

$$\sqrt[16]{(-3)^{16}} = |-3| = 3$$

$$\sqrt[10]{7^{10}} = |7| = 7$$

$$\sqrt[15]{(-1)^{15}} = -1$$

$$\sqrt[17]{23^{17}} = 23$$

Propiedades de la radicación

Como la radicación y la potencia son operaciones ligadas entre sí por definición, se tiene que las propiedades de la potencia se cumplen también con la radicación, siempre que las raíces involucradas existan.

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, es decir:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

En esta propiedad se hace evidente por qué se pide que existan las raíces. Por ejemplo $\sqrt{36} \neq \sqrt{-6}\,.\sqrt{-6}$ ya que $\sqrt{-6}$ no existe en $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{3^2.2^4} = \sqrt{3^2}.\sqrt{2^4} = \sqrt{9}.\sqrt{16} = 3.4 = 12$$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2.2^4} = \sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12$$

En general $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente entre la raíz del numerador y la raíz del denominador, es decir:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Raíz de una raíz

La raíz de una raíz es otra raíz cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces, es decir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$$

Actividades

62. Indicar el signo de las raíces de estos números reales y hallar el valor, si es posible.

a) $\sqrt{\frac{1052}{4208}}$ b) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$

d) $\sqrt[4]{-\frac{625}{81}}$

e) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

f) $\sqrt[7]{(-1)^7}$

g) $\sqrt{(-10)^2}$

h) $\sqrt[9]{(6)^9}$

i) $\sqrt[4]{(17)^4}$

63.Calcular

a) $12\sqrt{7}-8\sqrt{7}+9\sqrt{7}$

b) $\frac{6\sqrt{5}.6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$

d) $\sqrt{2}\,.\,(4-\sqrt{8})$

e) $(2+3\sqrt{2}).(5-\sqrt{2})$

f) $(2+\sqrt{3})^2$

g) $(6+\sqrt{2}).(6-\sqrt{2})$

64.Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar en el caso de veracidad y dar un contraejemplo para justificar la falsedad.

a) $\sqrt[4]{16}=2$

b) $\sqrt[6]{(-4)^6}=-4$

c) $\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$

d) $\sqrt[3]{8.27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2.3$

e) $(2-\sqrt{5})^2=4-5$

65.Se sabe que un triángulo rectángulo tiene un cateto que mide el triple que el otro. Si el más grande de ambos mide $(\sqrt{5}-\sqrt{2})\ cm$, hallar el área y el perímetro del triángulo.

66.Consultando las fórmulas de geometría, calcular la superficie y el volumen de un cilindro en el cual el diámetro mide $\sqrt[3]{4}\ cm$ y su altura es de $0{,}1\ m$.

Extracción e introducción de factores de una raíz

En determinados cálculos es conveniente extraer factores de una raíz. Para ello es necesario que el exponente del factor sea mayor o igual que el índice de la raíz. Veamos, en los siguientes ejemplos, cómo se procede.

$$\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3.5}=\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5}=5.\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt{5^7}=\sqrt{5^2.5^2.5^2.5}=\sqrt{5^2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{5}=5.5.5.\sqrt{5}=5^3.\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{7^6.5^5}=\sqrt[3]{7^6}.\sqrt[3]{5^5}=\sqrt[3]{7^3.7^3}.\sqrt[3]{5^3.5^2}=\sqrt[3]{7^3}.\sqrt[3]{7^3}.\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{5^2}=$$
$$7.7.5.\sqrt[3]{5^2}=7^2.5.\sqrt[3]{5^2}$$

Si en el radicando hay un factor con exponente igual al índice de la raíz, se puede extraer ese factor fuera de la raíz elevado a la uno.

Recordemos que si la raíz es par, y no conocemos el signo del factor, debemos usar valor absoluto, $\sqrt[n]{a^n}=|a|$

$$\sqrt[n]{a^n.b}=|a|.\sqrt[n]{b}$$

Siempre que sea posible extraeremos los factores de una raíz para simplificar el radicando.

Extraer todos los factores posibles de las raíces

$$\sqrt{500} \ \ y \ \ \sqrt{\frac{512}{45}}$$

Puesto que $500 = 2^2.5^3$, *tenemos que* $\sqrt{500} = \sqrt{2^2.5^3} = 2.5.\sqrt{5} = 10.\sqrt{5}$

Del mismo modo tenemos: $\sqrt{\frac{512}{45}} = \sqrt{\frac{2^9}{3^2.5}} = \frac{\sqrt{2^9}}{\sqrt{3^2.5}} = \frac{2^4.\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{2^4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$

De manera general, para extraer factores de una raíz realizamos los siguientes pasos:

- Descomponemos en factores el radicando.
- Si hay un factor cuyo exponente es mayor o igual que el índice de la raíz, dividimos dicho exponente por el índice de la raíz.
- El cociente de esta división será el exponente del factor fuera de la raíz.
- El resto de la división será el exponente del factor dentro de la raíz.

De la misma manera que hemos extraído factores de una raíz, también podemos introducir factores en ella. Observemos el procedimiento:

$$3.5^3.a^4.\sqrt{b} = \sqrt{(3)^2\ .(5^3)^2.(a^4)^2.b} = \sqrt{3^2.5^6.a^8.b}$$

$$3.5^3.a^4.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(3)^3\ .(5^3)^3.(a^4)^3.b} = \sqrt[3]{3^3.5^9.a^{12}.b}$$

Para introducir un factor en una raíz, se eleva dicho factor al índice de la raíz. Es decir

$$a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}.$$

Actividades

67. Extraer todos los factores que puedas de las siguientes raíces.

a) $3^2.\sqrt{5^3.a^2.b^4}$

b) $\sqrt[3]{7.a^{10}.b^9}$

c) $-12\sqrt{2^7.a^7}$

d) $\frac{16}{5}.\sqrt{\frac{125}{2}}$

68. Introducir en las raíces los factores que están fuera de ellas.

a) $\frac{16}{3}.\sqrt{a}$

b) $-7.11^3.\sqrt{2a}$

c) $\frac{1}{4}.b.\sqrt{3^3.b^3}$

d) $a^2.b.\sqrt[3]{3b}$

Raíz enésima como potencia fraccionaria y propiedades

Hasta ahora hemos considerado únicamente potencias de exponente natural o entero. Veremos ahora que el exponente de una potencia puede ser también un número racional.

Las potencias de exponente racional se definen mediante radicales del siguiente modo: La potencia que tiene como base un número real a y como exponente un número racional $\frac{m}{n}$ se define como la raíz de índice n y radicando a^m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Así, observamos que las raíces pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos aprenderemos cómo se expresan en un formato u en otro.

> Si queremos expresar como potencias de exponente racional a:
>
> $\sqrt[3]{-12}$ lo expresamos como $(-12)^{\frac{1}{3}}$
>
> $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$ lo expresamos como $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$.
>
> Si queremos expresar en forma de raíz a:
>
> $(124)^{\frac{1}{4}}$ lo escribimos como $\sqrt[4]{124}$
>
> $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ lo escribimos como $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

Las potencias de exponente racional se definieron de manera que siguen siendo válidas las mismas propiedades de la potencia ya estudiadas. En los ejemplos siguientes veremos cómo aplicamos estas propiedades.

> $$(2+a)^3.(2+a)^{\frac{1}{4}}.(2+a)^{\frac{3}{2}} = (2+a)^{3+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = (2+a)^{\frac{19}{4}}$$
>
> $$\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}:\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{7}{6}}$$
>
> $$\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$$
>
> $$(-9.a.b^2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}}.(a)^{\frac{3}{11}}.(b^2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}}.a^{\frac{3}{11}}.b^{\frac{6}{11}}$$

Como ocurre en el caso de potencias de exponente entero negativo, las potencias de exponente racional y negativo pueden transformarse en potencias de exponente positivo. Para ello, tendremos en cuenta que una potencia de exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la potencia de la misma base con exponente positivo. Esto es

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$5^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{5}{6}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$$

Potencias de base real y exponente racional

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional, siempre que sean válidas, a las cuales se añade la última propiedad vista, relativa a las potencias de exponente negativo.

Producto de igual base	$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
Cociente de igual base	$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
Potencia de potencia	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
Potencia de un producto	$(a.b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$
Potencia fraccionara negativa	$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

La transformación de raíces en potencias, y viceversa, puede ser útil a la hora de efectuar operaciones con raíces ya que nos proporciona herramientas para resolver un mismo cálculo de dos maneras distintas. Comprobemos con un ejemplo:

Para realizar el siguiente cálculo $\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}$ podemos proceder de dos maneras:

- Primera resolución: Aplicamos las propiedades de las operaciones con raíces.

$$\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt[4]{5}}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}}=\sqrt{\frac{3^3}{3}}.\sqrt[4]{\frac{5^5}{5}}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^3.2^2}}=$$

$$\sqrt{3^2}.\sqrt[4]{5^4}.\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}}=3^1.5^1.\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$$

- Segunda resolución: Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

$$\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}=3^{\frac{3}{2}}.5^{\frac{5}{4}}.3^{-\frac{1}{2}}.2^{-\frac{3}{5}}.2^{-\frac{2}{5}}.5^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{2}}.3^{-\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{4}}.5^{-\frac{1}{4}}.2^{-\frac{3}{5}}.2^{-\frac{2}{5}}=$$

$$3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}.2^{-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}}=3^1.5^1.2^{-1}=\frac{15}{2}$$

Actividades

69. Expresar como potencias de exponente racional:

a) $\sqrt{99}$ b) $\sqrt[5]{(18)^2}$

c) $\sqrt[7]{(-16)}$ d) $\left(\sqrt[3]{75}\right)^5$

70. Expresar en forma de raíz

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $27^{\frac{1}{3}}$ c) $(-4)^{\frac{1}{5}}$ d) $9^{\frac{5}{6}}$

71. El número $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$.

Expresar de la misma forma a:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$ c) $\frac{-2}{\sqrt[6]{3}}$

72. Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

a) $5 \cdot \left(\sqrt[12]{5^7}\right)^{-1} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^5}}$

b) $\left(-3 + 2\sqrt{7}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(-3+2\sqrt{7}\right)^3}$

c) $(25.a.b^3)^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{(25.a.b^3)^{-\frac{5}{4}}}$

d) $(-6-a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6-a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

e) $a^{-\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

f) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n+m}}$

73. Expresar en forma de una sola potencia:

a) $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4.\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}}.\left(-\frac{3}{4}\right)$

c) $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^3\right]^{\frac{3}{5}} : \left(1+\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^4 .(6)^6 : \sqrt[3]{6^9}}$

Racionalización

Al dividir un número real entre otro número real pueden aparecer expresiones en cuyo denominador haya alguna raíz, por ejemplo $\frac{2}{\sqrt{7}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ o $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Algunas veces, cuando se tienen expresiones de este tipo, puede ser conveniente buscar una expresión equivalente en cuyo denominador no aparezcan raíces; es decir, se racionaliza el denominador.

Racionalizar una expresión algebraica consiste en hallar otra expresión equivalente sin raíces en el denominador.

¿Por qué se racionaliza habitualmente el denominador y no el numerador? Para entenderlo, recordemos que el denominador representa el número de partes en que se divide una cantidad (el numerador). Esta interpretación solo tiene sentido si el denominador es racional. Así, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es la mitad de $\sqrt{2}$ pero ¿qué parte de la unidad representaría $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Para racionalizar, multiplicamos el numerador y el denominador por una misma expresión de forma que desaparezca la raíz del denominador.

Aprendamos con ejemplos cómo hacerlo:

> Queremos racionalizar la expresión $\frac{2}{\sqrt{7}}$.
>
> Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{7}$.
>
> $$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} . \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

> Para racionalizar cuando en el denominador no hay una raíz cuadrada, como en la expresión $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ procedemos como sigue:
>
> Eliminaremos la raíz del denominador multiplicando por una raíz del mismo índice, de modo que se obtenga una potencia en el radicando del exponente igual a este índice.
>
> $$\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5} = \sqrt[3]{5^2}$$

> Si tenemos la expresión $\frac{6}{\sqrt[3]{11^7}}$ podemos hacer algo similar.
>
> Eliminaremos la raíz del denominador multiplicando por una raíz del mismo índice, de modo que se obtenga una potencia de exponente múltiplo a este índice.
>
> $$\frac{6}{\sqrt[3]{11^7}} = \frac{6}{\sqrt[3]{11^7}} . \frac{\sqrt[3]{11^2}}{\sqrt[3]{11^2}} = \frac{6.\sqrt[3]{11^2}}{\sqrt[3]{11^9}} = \frac{6.\sqrt[3]{11^2}}{11^3}$$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son **expresiones conjugadas**. Así, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es la expresión conjugada de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ y, recíprocamente, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es la expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas que involucran raíces cuadradas, desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir, ya que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{b}^2 = a - b$$

> Queremos racionalizar una expresión que involucra dos términos en el denominador, como la siguiente: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
>
> Multiplicamos por la expresión conjugada del denominador.
>
> $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

Si tenemos el número $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ y lo racionalizamos, tenemos que

$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\frac{4.(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\frac{4.(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}$$
$$=2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$$

Podemos deducir, entonces, que los números $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ y $2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$ son iguales, solo que están expresados de formas distintas.

De manera general, para racionalizar el denominador de una expresión, tenemos:

- Si es de la forma $a\sqrt{b}$ multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{b}$.
- Si es de la forma $a\sqrt[n]{b^m}$ con $n>m$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.
- Si es de la forma $a\sqrt[n]{b^m}$ con $n<m$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{k.n-m}}$, con $k\in\mathbb{N}$ donde $k.n$ es el primer múltiplo de n tal que $k.n>m$
- Si es de la forma $a\pm\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada correspondiente.

En la resolución de los ejercicios no es obligatorio racionalizar (salvo que sea pedido en el enunciado).

Actividades

74.Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ b) $\frac{-17}{2\sqrt[3]{17}}$ c) $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{15}}$ e) $\frac{9}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$ f) $\frac{-2\sqrt{5}}{-2+\sqrt{6}}$

g) $\frac{4}{\sqrt[3]{5^8}}$

75.Efectuar todas las operaciones posibles para obtener el resultado

a) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{3}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{3\sqrt{2}}-2\sqrt{2}+7\sqrt{2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}$ d) $5\sqrt{11}-3\sqrt{17}-4.\frac{11}{\sqrt{11}}-9\sqrt{11}+8\sqrt{17}$

e) $\frac{\sqrt{3^3}.\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}.\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[4]{5}}$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$

g) $(7-\sqrt{21})(7+\sqrt{21})$

Aproximación de raíces para graficar en la recta

Supongamos que queremos representar en la recta numérica el valor $\sqrt{21}$. Si no podemos utilizar la calculadora, no sabemos exactamente el valor de esa raíz. Sin embargo, sabemos que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$16 < 21 < 25$$

Si aplicamos raíz en los tres miembros de la desigualdad, obtenemos:

$$\sqrt{16} < \sqrt{21} < \sqrt{25}$$

Es decir,

$$4 < \sqrt{21} < 5$$

Por lo tanto, sabemos que $\sqrt{21}$ está entre 4 y 5, y podríamos aproximar su representación como en la siguiente figura:

Supongamos ahora que queremos ubicar en la misma recta el valor $-\sqrt{3}$. Plantearemos las desigualdades con el valor positivo $\sqrt{3}$. Para esto, notemos en primer lugar que

$$1 < 3 < 4$$

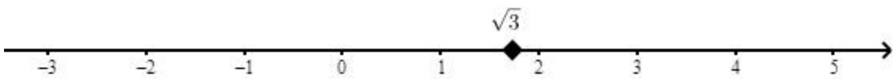
Entonces, aplicando raíz en los tres miembros obtenemos

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$

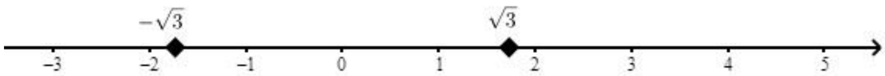
De lo que obtenemos

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

Esto se puede representar como sigue:



Ahora, por simetría, podemos ubicar el número $-\sqrt{3}$ a la misma distancia del 0, pero del lado de los números negativos, es decir el lado izquierdo. Tenemos, entonces, que



Actividades

76.Ubicar en una recta numérica los siguientes números reales:

a) $\sqrt{13}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $\sqrt{18}$,

d) $\sqrt{7}$ e) $-\sqrt{30}$ f) $\sqrt{26}$

Notación de intervalos

El orden de los números reales nos permite hablar del conjunto de los números reales comprendidos entre dos números determinados.

Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$; tal que $a < b$, llamaremos **intervalo** al conjunto formado por todos los números reales que están entre a y b. Estos conjuntos reciben distintos nombres de acuerdo a si los números a y b están incluidos o no en dichos conjuntos. A estos números a y b se los llama **extremos** del intervalo.

Un intervalo **cerrado** incluye a ambos extremos y a los reales entre los extremos, su notación por comprensión es:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

Un intervalo **abierto** incluye a los reales entre los extremos, pero no a ellos:

$$(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}: \mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$$

Los intervalos **semiabiertos** incluyen a un solo extremo y a los reales entre los extremos. Podemos encontrar las siguientes situaciones:

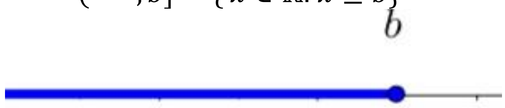
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$

Existen otros tipos de intervalos que tienen un solo extremo. Este tipo de intervalos se denominan infinitos.

$$(-\infty, b) = \{\, x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{\, x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$$



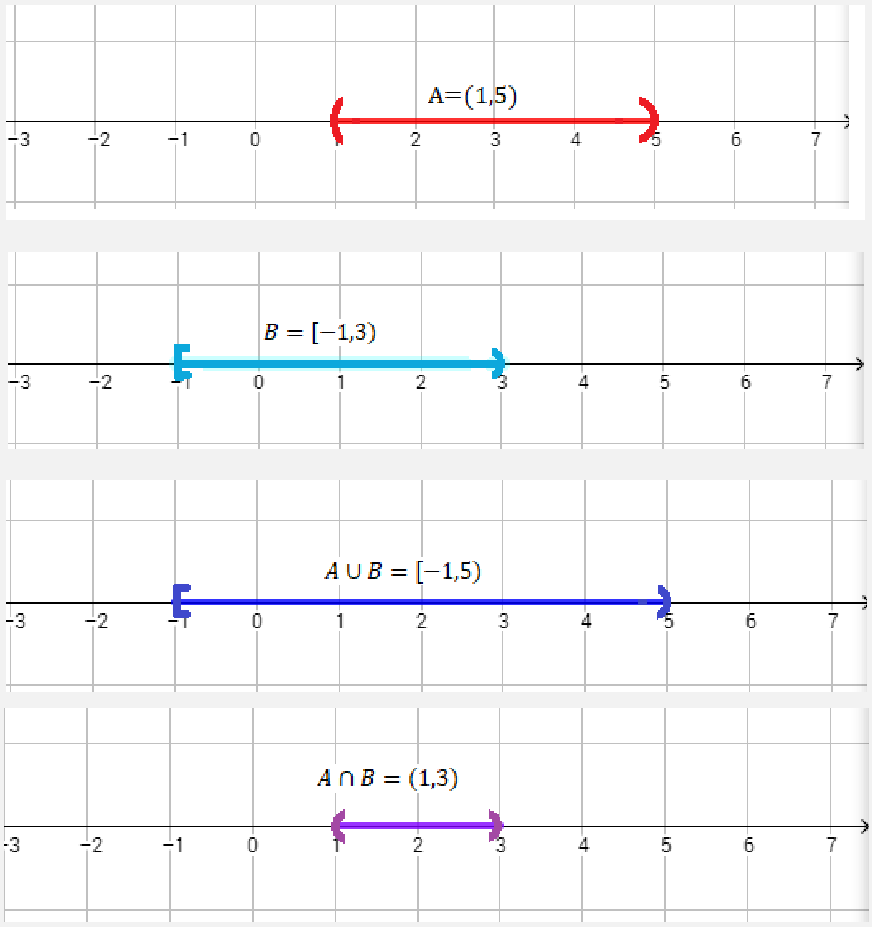
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$$

Observemos que si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo •; si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia ○. También se usa la notación de corchetes en lugar del círculo • para los casos en que se incluye un extremo y paréntesis en lugar de la circunferencia ○ para indicar que no se incluye el extremo.

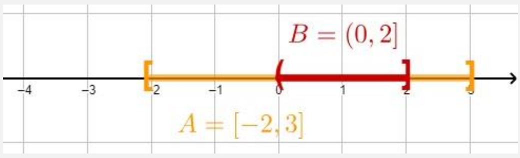
Los intervalos son subconjuntos de la recta real, por lo tanto, podemos efectuar las operaciones de unión e intersección sobre ellos.

Si $A = (1,5)$ *y* $B = [-1,3)$, *tenemos que* $A \cup B = [-1,5)$ *y* $A \cap B = (1,3)$.



También podemos tener un intervalo incluido en otro.

Si $A = [-2,3]$ y $B = (0,2]$, tenemos que $B \subset A$. Observemos en este caso que, $A \cup B = A$ y $A \cap B = B$.



Actividades

77. Escribir un intervalo que contenga a los puntos que están a distancia menor que 2 unidades del punto central -3. Graficar.
78. Representar los siguientes intervalos y determinarlos por comprensión:
    a) $[1,2]$ b) $(-1,0)$ c) $[2,3)$
    d) $(-2,3]$ e) $[4,\infty)$
79. Representar los intervalos $A = [-1,3)$ y $B = (2,6)$. Colorear el sector de la recta común a ambos intervalos. ¿Qué intervalo representa el segmento de recta coloreado? ¿Qué operación se realiza entre los conjuntos?
80. Dados los intervalos $A = (-4,6)$, $B = [1,8)$ y $C = (-\infty,4]$. Determinar:
    a) $A \cup B$ b) $B \cap C$
    c) $A \cap C$ d) $(A \cup C) \cap B$
81. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.
    a) $\frac{1}{2} \in [-1,1]$ b) $-2 \notin [-4,-1]$
    c) $6 \in (6,9]$ d) $10 \notin (0,\infty)$
    e) $\sqrt{14} \in [3,4]$ f) $\left[-1,\sqrt{5}\right) \subset (-\pi,\pi]$

Repasamos las principales propiedades en los conjuntos numéricos estudiados en este capítulo.

Propiedades para la suma:

$$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}\quad \begin{cases} \mathbb{N} \begin{cases} Ley\ de\ cierre \\ a+b=b+a \\ (a+b)+c=a+(b+c) \\ a+0=a \end{cases} \\ Existencia\ de\ opuesto \end{cases}$$

Propiedades para el producto:

$$\mathbb{Q},\mathbb{R}\quad \begin{cases} \mathbb{N},\mathbb{Z} \begin{cases} Ley\ de\ cierre \\ a.b=b.a \\ (a.b).c=a.(b.c) \\ a.1=a \end{cases} \\ Existencia\ de\ inverso \end{cases}$$

Actividades de repaso del Capítulo 1

1. Calcular

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[6]{4}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{0{,}25}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \left(0,\widehat{39} \cdot \frac{11}{11+2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{9}$

c) $\sqrt[3]{0{,}027} \cdot (0{,}81)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{(-1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}16}{\frac{1}{25}}}$

d) $\sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

f) $\frac{1{,}94 - \sqrt[3]{(-1)^5} - \left(\frac{50}{27}\right)^{-1}}{\frac{\sqrt{24}\sqrt{2}}{\sqrt{75}}}$

2. Aplicando propiedades de la potencia, mostrar que:

a) $\sqrt{50.5^{2n+6} + 20.5^{2n+7} + 3.5^{2n+8}} - \left(\sqrt[4]{3}.5\right)^4 .5^n = 0$

b) $\left(90 \cdot 3^{2n} + 12 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+2}\right) \cdot \left(\frac{3^{-(n+1)}}{4}\right)^2 - 1 = 0$

c) $\sqrt[3]{\left(7^{3n+9} + 42 \cdot 7^{3n+8} + 49 \cdot 7^{3n+7}\right)} \cdot \left(\frac{7^6}{2 \cdot 7^{n+9}}\right) + 1 = 2$

3. Resolver explicitando las propiedades utilizadas.

a) $\frac{\left(\sqrt{\mathbf{8}} - \sqrt{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8-5}}$

b) $\sqrt{1{,}2\hat{5} - \frac{73}{90}} : \left(-\frac{14}{9} - 3^{-2} + 1\right)$

c) $\frac{\sqrt{44}+\sqrt{11}}{\sqrt{44}-\sqrt{11}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1{,}0\hat{2} - \frac{26}{45}}}{\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}}}$

d) $(1,\widehat{63})^{-1} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{(2+\sqrt{5})^2 - 9}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt[3]{-0.008}}{\frac{2}{5}}$

e) $\frac{\left(1{,}9\hat{4} - \sqrt[3]{(-1)^7} - \left(\frac{18}{23}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}\sqrt{75}}} + \sqrt{2,\widehat{12} + \frac{62}{33}}$

f) $\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-1)} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}} + \left[\left(1 + \sqrt{20}\right)^2 - \sqrt{80}\right] \cdot 0,\hat{3}$

g) $\sqrt{3.6^{2n+8} + 72.6^{2n+6} + 24.6^{2n+7}} - 6^n.\left(\sqrt[4]{3}.6\right)^4$

4. Modelizar matemáticamente y resolver los siguientes problemas:

a) Un depósito de base cuadrada está lleno de cereal. El lado de la base mide $5\ m$. y la altura es $\frac{8}{5}$ del lado de la base. Un día se retira el 15% del grano y a la semana siguiente se retira otro 10% de grano restante. ¿Cuántos m^3 de grano quedaron? ¿Qué porcentaje del depósito quedó vacío?

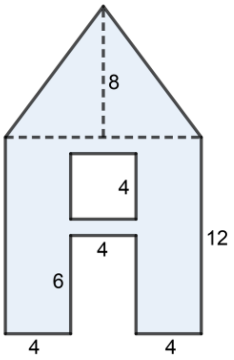
b) ¿En cuánto aumenta el área de un rectángulo cuyos lados miden 12 y 4 metros, respectivamente, si se aumentan ambos lados en un 25%?

c) Si la base de un rectángulo disminuye un 60% y la altura aumenta en un 150%, ¿varía la superficie?

d) Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 8. ¿Cómo se expresa esa relación matemáticamente?

e) Al comenzar el año Luis tenía $\$29400$ ahorrados. En enero se fue de vacaciones y gastó la tercera parte. En febrero $\frac{1}{5}$ de lo que le quedaba lo utilizó para comprarse ropa, y en marzo gastó los $\frac{3}{4}$ remanentes en libros para la facultad. ¿Cuánto dinero le sobró a Luis?

5. Calcular el área y perímetro de la siguiente figura:



6. En la siguiente tabla, cada expresión de la primera columna se corresponde con solo una expresión de la segunda y, a su vez, con una única de la última columna. Unir con flechas las expresiones correspondientes.

$(a+b)^2$	$3a^2+6ab+3b^2$	El cubo de la suma de a y b
$(a-b)^2$	a^2-b^2	El doble de la diferencia entre a y b
$(a+b)(a-b)$	$a^2+2ab+b^2$	El cuadrado de la diferencia de a y b
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	El triple del cuadrado de la suma de a y b
$2.(a-b)$	$a^2-2ab+b^2$	El cuadrado de la suma de a y b
$3(a+b)^2$	$2a-2b$	La diferencia de los cuadrados de a y b

Anexo del Capítulo 1

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que nos ayudan a determinar si un número es divisible por otro. Daremos a continuación los criterios más útiles a la hora de tener que simplificar una fracción.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 si termina en cero o cifra par.

> $4, 18,\ 2384,\ 87308630$ son múltiplos de 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

> 564: como $5+6+4=15$ y 15 es múltiplo de 3, tenemos que 564 es múltiplo de 3.

> 2040: como $2+0+4+0=6$ y 6 es múltiplo de 3, tenemos que 2040 es múltiplo de 3.

> 623: no es múltiplo de 3, ya que $6+2+3=11$ que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 si termina en cero o cinco.

> $45,\ 515,\ 7525,\ 230$ son múltiplos de 5.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11.

> 121: es múltiplo de 11, ya que $(1+1)-2=0$.

> 4224: es múltiplo de 11, dado que $(4+2)-(2+4)=0$.

> 1925: es múltiplo de 11 porque $(1+2)-(9+5)=-11$, que es múltiplo de 11.

Proporción numérica

Llamamos proporción a una relación entre magnitudes dada por la razón o cociente de ambas. Cuando esta proporción es constante, decimos que las medidas son proporcionales entre sí.

Es habitual utilizar esta relación de proporcionalidad para comparar figuras, unidades de medida, cantidades, u otros.

> Las fracciones $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes porque mantienen la proporción, que es $0{,}5$.

> Si una torta de $1\ kg$ lleva $200\ gr$ de manteca, entonces para la misma torta de $500\ gr$ se necesitan proporcionalmente $100\ gr$ de manteca.

> En un mapa topográfico un centímetro equivale a un kilómetro, entonces una ruta en línea recta de $40\ km$ estará representada en el mapa por un segmento de $40\ cm$.

Números irracionales

¿Por qué $\sqrt{2}$ es irracional?

Recordemos que n es par si y solo si n^2 es par y n es impar si y solo si n^2 es impar.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces se podría expresar

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ y sin factores en común (es decir, es una fracción irreducible).

Entonces, tenemos que $\sqrt{2}.n = m$, y si elevamos ambos miembros al cuadrado tenemos que

$$2.n^2 = m^2$$

Tenemos, entonces, que m^2 es par, y por ende m es par, por lo que podemos expresar $m = 2.c$ con $c \in \mathbb{Z}$.

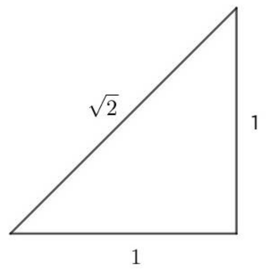
Reemplazando, tenemos que $2.n^2 = (2.c)^2 = 4c^2$, de donde $n^2 = 2c^2$. Luego n^2 es par y, entonces, n también es par.

Llegamos entonces a un absurdo, ya que tanto n como m resultaron pares, pero habíamos supuesto que no tenían factores en común. Entonces $\sqrt{2}$ no puede ser racional.

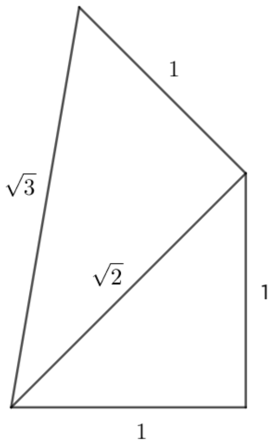
¿Se puede graficar un segmento con longitud irracional?

Como hemos visto, los números irracionales tienen infinitos decimales no periódicos y, por lo tanto, no es posible graficar con precisión segmentos de esa longitud. Sin embargo, existen técnicas que nos permiten graficar algunos segmentos de longitud irracional, como aquellos que provienen de la raíz cuadrada de un número natural.

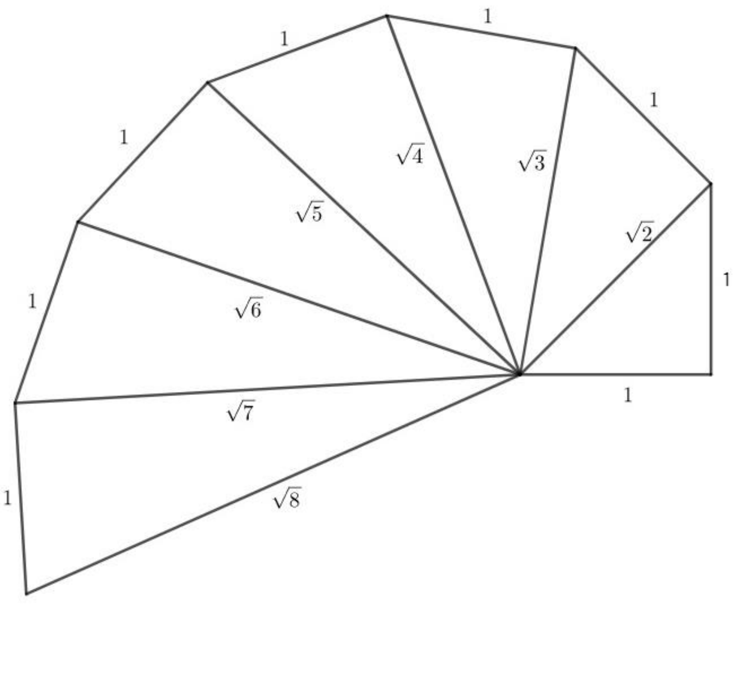
Para esto, observemos que, por el Teorema de Pitágoras, si tenemos un triángulo rectángulo en el que sus catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ (ya que es $\sqrt{1^2+1^2}$), como se ve en el dibujo:



Si ahora construimos otro triángulo rectángulo utilizando el lado que mide $\sqrt{2}$ como uno de los catetos y un lado de longitud 1 como el otro cateto, podemos aplicar nuevamente el Teorema de Pitágoras para ver que la longitud de la hipotenusa del segundo triángulo es $\sqrt{3}$, ya que es $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}$:



Si continuamos el procedimiento, podemos dibujar triángulos cuya hipotenusa mida $\sqrt{n}$, para cualquier número natural $n>0$:



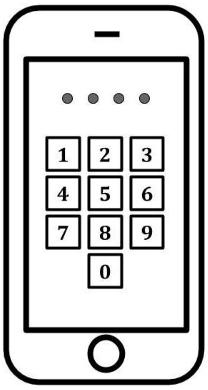
CAPÍTULO 2

Ecuaciones y polinomios

Juan se dejó olvidado el celular en la casa de su amigo Tomás. Juan necesita un número que tenía guardado en el celular y llama a su amigo con un teléfono fijo pidiendo que, por favor, busque el contacto. Para esto, el amigo debe poner la clave y resulta que Juan no se la sabe de memoria.

Aun así, como un modo de seguridad, Juan lleva junto al celular una tarjeta con una información que puede ayudarle a descifrar la clave y le pide a Tomás que la lea: “El cuádruplo de la clave, disminuido en mil doscientos equivale al doble de dicha clave aumentado en novecientos treinta y dos”. ¿Cuál es la clave del celular de Juan? ¿Podrá Tomás ayudar a Juan?

Entre ambos descifraron, utilizando los datos de la tarjeta, que la clave era 1066.



Muchos de los problemas con los que nos encontramos en nuestra vida diaria tienen una representación matemática a través de una o varias ecuaciones. Por esta razón, el resolver esa ecuación o ese conjunto de ecuaciones sirve para dar respuesta a esa situación. Resolver problemas, en general, es una tarea que todo ingeniero debe realizar. Y encontrar solución a un problema es un reto que algunas veces lleva horas o incluso días e involucra, muchas veces, a todo un equipo de personas.

Ecuaciones

Se llama **identidad** a una igualdad algebraica que se satisface para cualquier valor que se le atribuya a las incógnitas o variables que en ella figuren. Por ejemplo, una identidad es $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ porque se mantiene la igualdad para cualquier valor que se le asigne a a y b.

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas **miembros**, separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas), relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes y el término desconocido o **incógnita** se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", aunque puede utilizarse cualquier otra letra.

La expresión escrita a la izquierda del signo igual en una ecuación recibe el nombre de **primer miembro**, mientras que la expresión que está a la derecha del signo igual se llama **segundo miembro**.

$$incógnita$$

$$\underbrace{3+2\overbrace{x}}_{Primer\ miembro} = \underbrace{5\overbrace{x^2}+8}_{Segundo\ miembro}$$

En una ecuación puede haber más de una incógnita, es decir, más de un valor desconocido.

La igualdad planteada por una ecuación será verdadera o falsa dependiendo de los valores numéricos que tomen las incógnitas.

Las soluciones de la ecuación son los valores numéricos que deben tomar las incógnitas para que la igualdad sea cierta. Es decir, al sustituir estos valores por las letras en la ecuación y operar, obtenemos una igualdad. Resolver una ecuación es calcular la o las soluciones de la misma. Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lo llamamos **conjunto solución**.

Siempre después de resolver una ecuación conviene comprobar que la solución es válida, es decir que si reemplazamos en la ecuación obtenemos una identidad. Este paso se llama **verificación.**

Comprobar que $x = -5$ es solución de la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$

Si reemplazamos por $x = -5$ en la ecuación $2x - 3 = 3x + 2$, verificamos que

$$2.(-5) - 3 = 3.(-5) + 2$$

$$-10 - 3 = -15 + 2$$

$$-13 = -13$$

Como se cumple esta igualdad, sabemos que -5 pertenece al conjunto solución.

Actividades

1. Verificar si los siguientes valores de x son soluciones de la ecuación correspondiente. Justificar la respuesta.

   a) $x = 5,\ x = 3\ \text{ y }\ x = -7$ $\qquad\qquad x^2 + 2x - 35 = 0$

   b) $x = -2,\ x = 3\ \text{ y }\ x = 1$ $\qquad\qquad x^3 + 2x^2 = 2 + x$

Leyes de monotonía

- Ley de monotonía para la suma: $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$.

  Es decir, si sumamos o restamos una misma cantidad en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.

  > Si tenemos la ecuación $x + 5 = 13$, podemos restar 5 a ambos lados para obtener la ecuación
  >
  > $$x + 5 - 5 = 13 - 5$$
  >
  > Es decir, obtenemos $x = 8$.

- Ley de monotonía para el producto: $A = B \Leftrightarrow k.A = k.B,\ k \neq 0$.

  Es decir, si multiplicamos o dividimos por una misma cantidad no nula en ambos miembros de una ecuación, la igualdad se mantiene.

  > Dada la ecuación $2x = 10$, podemos dividir a ambos lados por 2 para tener la ecuación
  >
  > $$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$
  >
  > de la cual obtenemos $x = 5$.

Al aplicar estas propiedades a una ecuación, obtenemos una ecuación más sencilla de resolver.

Resolver la ecuación $4x - 5 = 27$ *utilizando las propiedades.*

Hallaremos el valor de la incógnita utilizando las propiedades ya estudiadas

$4x - 5 = 27$	Ecuación original
$4x - 5 + 5 = 27 + 5$	Monotonía para la suma
$4x = 32$	Asociativa
$4x.\frac{1}{4} = 32.\frac{1}{4}$	Monotonía para el producto
$x = 8$	Ecuación más simple

De la última ecuación deducimos que 8 *es la solución de la ecuación original. Comprobemos que esto es verdad:* $4.8 - 5 = 32 - 5 = 27$

Entonces el conjunto solución es $S = \{8\}$.

Consecuencias de las leyes de monotonía

- Todo término que figura sumando en un miembro de una ecuación puede pasar al otro miembro restando y, recíprocamente, si el término está restando, puede pasar sumando al otro miembro.
- Si un número está multiplicando a todos los términos de un miembro de una ecuación, puede pasar al otro miembro como divisor de todos los términos y, recíprocamente, si está dividiendo a todos los términos, puede pasar multiplicando a todos los términos del otro miembro de la ecuación.
- Se puede cambiar el signo a todos los términos de una ecuación, que sería lo mismo que multiplicar a ambos miembros por -1.
- Para suprimir los denominadores de una ecuación, basta con multiplicar a ambos miembros por el producto de los denominadores, o bien por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

En esta sección estudiaremos dos tipos de ecuaciones de una sola incógnita: ecuaciones lineales y cuadráticas.

Ecuaciones lineales

Una **ecuación de primer grado o lineal** es equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Para hallar las soluciones de una ecuación lineal se debe operar con ecuaciones equivalentes mediante el uso de propiedades hasta obtener una ecuación del tipo $x = c$.

Si $ax + b = 0$, tenemos que

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Entonces $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Se pide que $a \neq 0$, porque en caso contrario no sería una ecuación de primer grado o lineal. Si admitimos la posibilidad de que a sea 0, entonces obtenemos $0x = -b$, y aquí podemos tener dos casos:

- Si $b = 0$, la ecuación es válida para cualquier valor real que tome x, por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones y se denota $S = \mathbb{R}$.
- Si $b \neq 0$, no existe ningún valor real que cumple la igualdad, por lo que la ecuación no tiene solución y se denota $S = \emptyset$.

> $$4x + 18 = 0 \to 4x = -18 \to x = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$$
>
> Por lo tanto $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$.

> $x + 4 - 3x = 2 - 2x + 2 \quad \to \quad x - 3x + 2x = 2 + 2 - 4 \quad \to \quad 0x = 0$
>
> Por lo tanto $S = \mathbb{R}$.

$6x + 4 = 4x - 2 + 2x \quad \rightarrow \quad 6x - 4x - 2x = -2 - 4 \quad \rightarrow \quad 0x = -6$

Por lo tanto $S = \emptyset$.

Actividades

2. Resolver las siguientes ecuaciones explicitando el conjunto solución
   a) $2x - 3 = 6 + x$
   b) $2(2x - 3) = 6 + x$
   c) $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$
   d) $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 = x$
   e) $\frac{3(1+2x)+5}{2} = 2(x + 2) + x$
   f) $\frac{x+4}{2} = \frac{x}{11} + 11$
   g) $\frac{2x+12}{3} = \frac{10x-30}{15} + 1$
   h) $-3(2x - 5) - 5x = 3x$
3. Desarrollar la siguiente ecuación y utilizar propiedades de monotonía para hallar una ecuación más sencilla en la indeterminada x.
   $$(x + 2)^2 - (b - 2)^2 = x(x - a) - (b^2 - 4b + 8)$$
   a) ¿Qué tipo de ecuación es?
   b) Determinar, si es posible, los valores reales de a y b para que la ecuación en la indeterminada x:
      I. Tenga solución única.
      II. No tenga solución.

Problemas y aplicaciones de ecuaciones lineales

Ahora que ya estudiamos la resolución de las ecuaciones lineales, veamos la aplicación de dichas ecuaciones para resolver ciertos problemas.

Al resolver un problema tenemos que considerar los siguientes pasos:

1. Interpretar el enunciado para modelizar la situación.
2. Definir una variable adecuada y plantear la ecuación que represente la situación.
3. Resolver la ecuación planteada.
4. Comprobar que la solución obtenida satisface la ecuación.
5. Analizar si la solución hallada es razonable para el problema que se está resolviendo.
6. Dar la respuesta al problema.

Interpretar el enunciado

Es muy importante leer cuidadosamente el enunciado, graficar la situación de ser posible, identificar los datos dados y detectar la o las incógnitas. Si el problema incluye datos con unidades de medidas, estas deben estar unificadas. Esto es, si hubiera distintas unidades, hay que elegir una unidad y convertir las demás a esa unidad.

Definir una variable y plantear la ecuación

Para plantear la ecuación que modelice el problema a resolver no hay reglas definidas, aunque es aconsejable leer atentamente el enunciado, elegir y definir una variable de manera correcta y traducir al lenguaje algebraico (matemático) cada una de las partes del enunciado dado.

Comprobar la solución obtenida

Debemos verificar que la solución hallada cumple todas las condiciones del enunciado dado. Es decir, reemplazamos la solución obtenida y verificamos que satisface las ecuaciones que planteamos.

Discutir la solución obtenida

A veces, la solución de un problema, a pesar de ser matemáticamente correcta, no lo es en la práctica o contexto del problema a resolver. Por ejemplo, si tenemos un problema en el que se busca calcular la cantidad de personas que asistieron a una fiesta, no podemos tener una cantidad fraccionaria ni negativa. Si buscamos calcular la edad de Pedro, la misma podría ser fraccionaria, pero no negativa. Las longitudes pueden ser números naturales, fraccionarios o irracionales, pero siempre positivos.

Por lo tanto, es siempre conveniente interpretar el resultado una vez hallado, es decir, considerar si la solución matemática hallada es o no posible.

Dar la respuesta al problema

Siempre debemos dar una respuesta completa a la pregunta o el planteo del problema, escribiendo la o las soluciones obtenidas con sus unidades correspondientes (pueden ser unidades de medida, de tiempo, precios, etc.).

Compré un martillo y un puñado de clavos, pagando un total de $\$75$*, habiendo pagado cuatro veces más por el martillo que por los clavos ¿Cuánto pagué por cada objeto?*

Una vez leído el enunciado, podemos identificar dos incógnitas: el valor del martillo y el valor del puñado de clavos. Ambos valores están relacionados entre sí y, por lo tanto, podemos utilizar a cualquiera de ellos como incógnita de la ecuación con la que modelizaremos el problema. Por ejemplo, si llamamos x *al valor en* $\$$ *de los clavos, entonces el martillo valdrá* $4x$*. La suma de ambas cantidades dará el total del dinero abonado y podemos representar esto por la* *ecuación $4x + x = 75$. Notar que en la ecuación planteada sumamos valores en $\$$ e igualamos a un valor en $\$$.*

Al resolver la ecuación planteada obtenemos:

$$4x + x = 75$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

Una vez hallado el valor de x, sabemos que el puñado de clavos vale $\$15$ y entonces el martillo que vale 4 veces el valor de los clavos, cuesta $4.15 = 60$, o sea $\$60$.

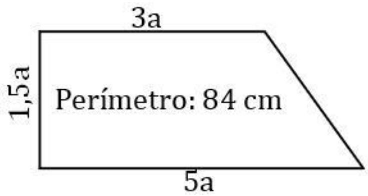
Si verificamos los valores hallados en el enunciado dado, vemos que la suma del valor del martillo y de los clavos será: $60 + 15 = 75$ y que el martillo vale cuatro veces el valor de los clavos. Concluimos que se cumplen las condiciones dadas en el enunciado.

Respuesta al problema: El valor del martillo fue de $\$60$ y del puñado de clavos fue de $\$15$.

Actividades

4. Escribir la ecuación que modeliza las siguientes situaciones y luego resolverlas.
   a) El doble del número x, disminuido en 3 es igual al número x más 15.
   b) El número x excede en 4 unidades a 21.
   c) La suma del número x y su anterior es 17.
   d) El doble del número x es igual a la quinta parte de x, más 18.
   e) Hallar el número cuyo triple más su cuádruple suman 77.
5. Un número se multiplica por 9 y el resultado es el número aumentado en 112. ¿Cuál es el número inicial?
6. Las longitudes de los lados de un triángulo escaleno son números impares consecutivos. El perímetro es $69\ cm$. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?
7. Alejandro viajó en taxi. Si la bajada de bandera sale $\$25$ y por cada 100 metros recorridos se aumentan $\$3$, ¿cuántos kilómetros recorrió si pagó $\$190$?
8. Eugenio tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Cuántos años tiene?
9. Si regalo a un amigo la quinta parte de lo que tengo en mi billetera y a otro la cuarta parte de lo que me quedaba, me quedarán $\$36$. ¿Cuánto tengo?
10. Este mes gané 5% más que el mes pasado. Lo mismo me pasó el mes pasado. En dos meses mi sueldo aumentó $\$820$. ¿Cuánto cobro ahora?
11. Construir distintas ecuaciones que cumplan las siguientes condiciones
    a) $x = -3$ es solución.
    b) $x = \frac{5}{2}$ es solución.
    c) Tiene infinitas soluciones.
    d) No tiene solución.

12. Teniendo en cuenta la figura a continuación, responder las siguientes preguntas:



a) ¿Es posible hallar una expresión que represente el perímetro de la figura?

b) Calcular el valor de la constante a.

c) Determinar las dimensiones de la figura.

Problemas de mezclas

Algunos problemas de la vida cotidiana que involucran mezclas se pueden resolver con ecuaciones. Consideremos el siguiente ejemplo:

Para fabricar una harina especial se mezclan dos tipos de harina. Del primer tipo de harina se utilizan $6\ kg$ *y del segundo tipo,* $4\ kg$. *Si el primer tipo de harina cuesta* $\$30$ *por kilogramo y el segundo tipo cuesta* $\$25$ *por kilogramo, ¿cuánto cuesta el kilogramo de la harina especial?*

Para resolver, notemos que cuando mezclemos las dos harinas, tendremos en total $10\ kg$ *de harina. Además, para calcular lo que se gastó para comprar las dos harinas, basta con multiplicar el precio de cada tipo de harina por la cantidad de kilogramos que se compraron, de lo que obtenemos*

$$30.6 + 25.4 = 280$$

Por lo tanto, se gastaron en total $\$280$ *para obtener los* $10\ kg$ *de harina especial, por lo que cada kilogramo cuesta* $\$28$.

__Respuesta:__ El kilogramo de harina especial cuesta $\$28$.

Notemos que en el ejemplo anterior están involucradas las siguientes variables:

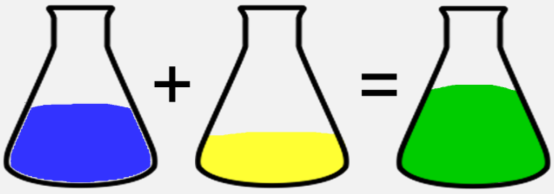
$P_1 = Precio\ de\ 1\ kg.del\ tipo\ 1\ de\ harina$	$C_1 = cant.de\ kg.del\ tipo\ 1\ de\ harina$
$P_2 = Precio\ de\ 1\ kg.del\ tipo\ 2\ de\ harina$	$C_2 = cant.de\ kg.del\ tipo\ 2\ de\ harina$
$P_F = Precio\ de\ 1\ kg.de\ la\ harina\ especial$	$C_F = cant.de\ kg.de\ la\ harina\ especial = C_1 + C_2$

Estas variables están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$P_1.C_1 + P_2.C_2 = P_F.(C_1 + C_2)$$

Esta última ecuación nos permite resolver numerosos problemas en los cuales se mezclan dos o más sustancias para formar otra, y donde nos interesa conocer alguna propiedad de la sustancia resultante. Un planteo similar al ejemplo anterior, en el que buscamos el precio, nos permitirá resolver otros problemas de aplicación, como veremos en los siguientes ejemplos.

Se tiene un litro de jugo con un 40% *de pulpa y se pretende agregar agua para obtener otro jugo con el* 15% *de pulpa. Modelizar la situación dada. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para obtener el nuevo jugo?*



En este caso elegimos como unidad los litros, ya que la información está dada de esta manera, y tenemos que responder también en esta unidad. Para este ejercicio, la propiedad que estudiamos es la concentración de pulpa que hay en cada sustancia (el jugo que teníamos y el agua que agregamos).

Por lo tanto, en nuestro problema tenemos los siguientes datos:

$$P_1 = \frac{40}{100} = concentración\ de\ pulpa\ del\ jugo\ original$$

$$P_2 = \frac{0}{100} = concentración\ de\ pulpa\ del\ agua$$

$$P_F = \frac{15}{100} = concentración\ de\ pulpa\ del\ jugo\ final$$

$$C_1 = 1\ l\ = cantidad\ del\ jugo\ original\ (medida\ en\ litros)$$

$$C_2 = cantidad\ de\ agua\ (medida\ en\ litros)$$

$$C_F = 1\ l + C_2 = cantidad\ de\ jugo\ final\ (medida\ en\ litros)$$

Si planteamos ahora la ecuación que corresponde a la concentración de pulpa en esta mezcla, tenemos

$$P_1.C_1 + P_2.C_2 = P_F(C_1 + C_2)$$

Si reemplazamos ahora los datos que tenemos, la ecuación resulta

$$\frac{40}{100}.1 + \frac{0}{100}.C_2 = \frac{15}{100}(1 + C_2)$$

Es decir, tenemos una ecuación lineal en la que la única incógnita es C_2, *la cantidad de agua que hay que agregar.*

Si multiplicamos en cada término, simplificamos y aplicamos la propiedad distributiva, tenemos

$$\frac{2}{5} + 0 = \frac{3}{20} + \frac{3}{20}C_2$$

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{3}{20}C_2$$

$$\frac{8-3}{20} = \frac{3}{20}C_2$$

$$\frac{5}{20} = \frac{3}{20}C_2$$

Multiplicando por 20 *a ambos lados de la igualdad, tenemos*

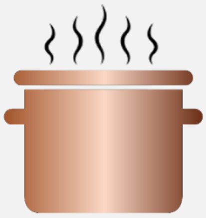
$$20.\frac{5}{20} = 20.\frac{3}{20}C_2$$

$$5 = 3.C_2$$

$$\frac{5}{3} = C_2$$

<u>Respuesta</u>: Debemos agregar $\frac{5}{3}\,litros$ *de agua para obtener un jugo con una concentración de pulpa del* 15%.

En una olla con 6 *litros de agua a* $90°C$ *se vierten* 8 *litros de agua a* $60°C$. *¿A qué temperatura está el agua de la olla?*



En este caso, tenemos los siguientes datos:

$$P_1 = 90°C = temperatura\ del\ agua\ que\ estaba\ en\ la\ olla$$

$$P_2 = 60°C = temperatura\ del\ agua\ que\ se\ vierte$$

$$P_F = temperatura\ final\ del\ agua\ (es\ lo\ que\ queremos\ averiguar)$$

$$C_1 = 6\,l\ = cantidad\ de\ agua\ en\ litros\ que\ había\ en\ la\ olla$$

$$C_2 = 8\,l = cantidad\ de\ agua\ en\ litros\ que\ se\ agrega$$

$$C_F = C_1 + C_2 = 14\,l = cantidad\ en\ litros\ de\ agua\ final$$

Si planteamos ahora la ecuación que corresponde a la temperatura del agua en esta mezcla, tenemos

$$P_1.C_1 + P_2.C_2 = P_F(C_1 + C_2)$$

Si reemplazamos ahora los datos que tenemos, la ecuación resulta

$$90.6 + 60.8 = P_F.14$$

Ahora podemos resolver la ecuación resultante

$$540 + 480 = P_F.14$$

$$1020 = P_F.14$$

$$\frac{1020}{14} = P_F$$

$$\frac{510}{7} = P_F$$

<u>Respuesta</u>: La temperatura final de la mezcla de las dos cantidades de agua es de $\frac{510}{7}°C$ *(que es aproximadamente 72,8°C, una temperatura intermedia entre las dos que tenían las partes de agua mezcladas).*

Si tenemos 5 kilogramos de un café que cuesta $\$20$ por kilogramo, y queremos mezclarlo con un café que cuesta $\$50$ el kilogramo, para obtener una mezcla que cueste $\$35$. ¿Cuánto café del segundo tipo debemos agregar?

Si llamamos x a la cantidad de kilogramos de café del segundo tipo, entonces

$$20.5 + 50.x = 35(5 + x)$$

Si resolvemos la ecuación, obtenemos que $x = 5$.

<u>*Respuesta:*</u> *Debemos agregar 5 kilogramos del segundo tipo de café.*

Actividades

13. Modelizar y resolver las siguientes situaciones:

a) Un comerciante quiere hacer un té especial mezclando dos variedades. Del primer tipo de té, que tiene un costo de $\$10$ el kilogramo, desea utilizar 5 kilogramos. ¿Cuántos kilogramos debe usar del segundo tipo de té, que tiene un costo de $\$50$ el kilogramo, para que la mezcla cueste $\$25$ el kilogramo?

b) Un fabricante de ron desea producir 600 litros de un ron especial con un grado alcohólico de 26%. Si dispone de un ron añejo de 30% de grado alcohólico y otro ron de 20% de alcohol. ¿Qué cantidad de cada ron deberá mezclar para obtener la cantidad deseada del ron especial?

c) Se quiere hacer una variedad especial de jugo mezclando dos variedades. Del primer tipo de jugo, que tiene un costo de $\$50$ el litro se desean utilizar 4 litros. ¿Cuántos litros debe usar del segundo tipo de jugo, que tiene un costo de $\$20$ el litro para que la mezcla cueste $\$40$ el litro?

d) Se tienen dos lingotes de oro, uno tiene un 60% de pureza y el otro un 96%. Queremos mezclar $4\ kg$ del primer tipo y $2\ kg$ del segundo, ¿de qué pureza será la mezcla obtenida?

e) Se tienen dos variedades de nueces que se quieren vender mezcladas a $\$64$ el kilogramo. La primera clase vale $\$40$ el kilogramo y la segunda $\$80$ el kilogramo. Si de la segunda clase utilizamos 6 kilogramos, ¿cuántos kilogramos de la primera clase necesitamos utilizar en la mezcla?

Velocidad

Algunos problemas que se relacionan con el movimiento se pueden modelizar utilizando ecuaciones lineales. Por ejemplo, si un auto viaja a una velocidad constante de 50 kilómetros por hora durante tres horas, entonces recorre $50 \cdot 3 = 150\ km$. Este es un ejemplo de la relación que existe entre la distancia, la velocidad y el tiempo:

$$distancia = velocidad \cdot tiempo$$

Despejando la velocidad, obtenemos otra fórmula equivalente:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$$

> La velocidad del sonido es de $343{,}2\ \frac{m}{s}$ al nivel del mar (con $20°C$ de temperatura y 50% de humedad). En esas condiciones, en 10 segundos el sonido recorre
>
> $$343{,}2\ \frac{m}{s} \cdot 10\ s = 3432\ m$$
>
> Es decir en 10 segundos recorre 3432 metros.

Los guepardos pueden correr a una velocidad de $120\ \frac{km}{h}$. Calcular el tiempo que le llevará a un guepardo correr $15\ km$ si está corriendo a esa velocidad.

Para resolver este problema, recordemos la ecuación que relaciona la velocidad con la distancia y el tiempo:

$$velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$$

En nuestro ejemplo, la velocidad es de $120\ \frac{km}{h}$, la distancia es $15\ km$ y la incógnita t es el tiempo medido en horas. Reemplazando en la ecuación, tenemos

$$120\ \frac{km}{h} = \frac{15\ km}{t}$$

Si multiplicamos por t a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$120\ \frac{km}{h} \cdot t = 15\ km$$

Despejando t en la ecuación, obtenemos la igualdad

$$t = 15\ km : 120 \frac{km}{h}$$

Es decir,

$$t = 15\ km \cdot \frac{1h}{120km}$$

$$t = \frac{15h}{120} = \frac{1}{8}h$$

<u>Respuesta</u>: Al guepardo le llevará $\frac{1}{8}$ de hora recorrer los $15\ km$ o sea, 7 minutos y medio.

Actividades

14. Un tren sale de La Plata y viaja a una velocidad promedio de $50\frac{km}{h}$. ¿Cuánto tiempo le lleva llegar a Berazategui si la distancia que recorrió el tren es de $35\ km$?
15. Un pequeño avión viaja desde Córdoba hasta Mendoza a una velocidad promedio de $230\frac{km}{h}$. Si el viaje le lleva 2 horas, ¿qué distancia recorrió el avión?
16. Cuando Pedro va en colectivo a la facultad, el viaje le lleva 15 minutos. Si hace el mismo recorrido en bicicleta, le lleva 50 minutos. La velocidad promedio del colectivo es de $40\frac{km}{h}$. ¿Cuál es la velocidad promedio a la que va Pedro en bicicleta? ¿A qué distancia vive Pedro de la facultad?

Un resultado que utilizaremos en esta materia, y luego en materias más avanzadas de matemática, es el siguiente teorema:

Teorema del factor cero: Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$p.q = 0 \leftrightarrow p = 0 \text{ o } q = 0.$$

Es decir, la única manera de que un producto valga 0 es que alguno de los factores sea igual a 0. Y también que si un factor es 0, el producto también es 0.

Este teorema será muy práctico cuando al resolver una ecuación nos encontremos con que en uno de sus miembros hay un producto y, en el otro, el número cero. En este caso, podremos concluir que, si el producto es igual a cero, entonces alguno de los factores que intervienen vale cero.

Si queremos hallar las soluciones de la ecuación

$$(x-1).(x+3) = 0$$

Sabemos que deben estar dadas por valores tales que $x-1=0$ o $x+3=0$, es decir que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{1, -3\}$.

Esta propiedad no es válida cuando el producto de dos factores está igualado a un número distinto de 0. Por ejemplo, si tenemos que $x.y = 2$, no necesariamente ocurre que $x = 2$ o $y = 2$, porque podría ocurrir que $x = 6$ e $y = \frac{1}{3}$.

Ecuaciones cuadráticas

Se llama **ecuación cuadrática** a toda ecuación que es equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , con } a \neq 0$$

Cada uno de los términos de la ecuación recibe un nombre en relación al exponente al que está elevada la variable, y estos son:

$$\underbrace{ax^2}_{\substack{Término\\cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\substack{Término\\lineal}} + \underbrace{c}_{\substack{Término\\independiente}} = 0$$

Se pide la condición $a \neq 0$, ya que si tuviéramos que $a = 0$, se tendría una ecuación lineal.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones veremos primero algunos casos sencillos.

- **Caso $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$**: Tenemos entonces $ax^2 + bx = 0,$ de donde se puede sacar x como factor común, quedando $x(ax + b) = 0$. Ya sabemos que si un producto es igual a cero, es porque alguno de los factores debe ser cero, por lo que sabemos que $x = 0$ o $ax + b = 0$, es decir, $x = -\frac{b}{a}$. Entonces, tenemos dos soluciones de la ecuación cuadrática y el conjunto solución es $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Resolver la ecuación cuadrática $3x^2 + 9x = 0$.

Si $3x^2 + 9x = 0$, *entonces tenemos* $x.(3x + 9) = 0$, *de donde* $x = 0$ *o* $3x + 9 = 0$, *es decir* $x = -\frac{9}{3} = -3$.

Por lo tanto, $S = \{0, -3\}$.

- **Caso $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$**: Tenemos, entonces, $ax^2 + c = 0$ y, si despejamos x^2, nos queda $x^2 = -\frac{c}{a}$

  En el caso que $-\frac{c}{a} > 0$, (eso sucede si el signo $(c) \neq$ signo (a)), tenemos dos soluciones $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ o $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Es decir $S = \left\{\sqrt{-\frac{c}{a}}, -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

  En el caso $-\frac{c}{a} < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución, ya que un número al cuadrado nunca puede ser negativo. En este caso, decimos que el conjunto solución es vacío, lo que escribimos $S = \emptyset$.

Resolver las ecuaciones cuadráticas $2x^2 - 4 = 0$ *y* $2x^2 + 4 = 0$.

Si $2x^2 - 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = \frac{4}{2} = 2$, *por lo que* $x = \sqrt{2}$ *y* $x = -\sqrt{2}$ *son soluciones de la ecuación. Por lo tanto,* $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Si $2x^2 + 4 = 0$, *tenemos que* $x^2 = -\frac{4}{2} = -2$, *por lo que la ecuación no tiene solución. Es decir,* $S = \emptyset$.

- **Caso $\boldsymbol{b = c = 0}$**: Queda $ax^2 = 0$, donde la única solución es $x = 0$. Es decir, $S = \{0\}$.

Resolver la ecuación cuadrática $9x^2 = 0$

Si $9x^2 = 0$, *tenemos que* $x = 0$, *por lo tanto* $S = \{0\}$.

- **Caso $\boldsymbol{a(x-\alpha)^2 + \beta = 0}$:** Si la ecuación cuadrática está expresada de la forma $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$, podemos despejar y obtener que $(x-\alpha)^2 = -\beta/a$ y, de manera análoga al caso anterior, la existencia o no de soluciones depende del signo de $-\beta/a$.
  - Si $-\frac{\beta}{a} > 0$, las dos soluciones son $x = \sqrt{-\frac{\beta}{a}} + \alpha$ y $x = -\sqrt{-\frac{\beta}{a}} + \alpha$
  - Si $-\frac{\beta}{a} < 0$, no hay solución real.
  - Si $-\frac{\beta}{a} = 0$ (es decir, cuando $\beta = 0$), la única solución es $x = \alpha$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$3(x-1)^2 - 27 = 0$$

Si $3(x-1)^2 - 27 = 0$, *tenemos que* $(x-1)^2 = \frac{27}{3} = 9$, *de donde* $x - 1 = 3$ *o* $x - 1 = -3$, *es decir* $x = 4$ *o* $x = -2$. *Por lo tanto,* $S = \{4, -2\}$.

$$3(x-1)^2 + 27 = 0$$

Si $3(x-1)^2 + 27 = 0$, *tenemos que* $(x-1)^2 = -\frac{27}{3} = -9$, *entonces la ecuación no tiene solución en los reales, ya que no existe ningún número real que al cuadrado tenga un resultado negativo. Por lo tanto,* $S = \emptyset$.

$$3(x-1)^2 = 0$$

Si $3(x-1)^2 = 0$, *tenemos que* $(x-1)^2 = \frac{0}{3} = 0$, *entonces tenemos que* $x - 1 = 0$, *es decir,* $x = 1$. *Por lo tanto,* $S = \{1\}$.

En base a lo analizado antes, sería conveniente poder expresar la ecuación $ax^2 + bx + c$ como $a(x-\alpha)^2 + \beta$. Veremos a continuación un método para lograrlo, conocido como completar cuadrados.

Si realizamos los cálculos necesarios, podemos probar que para cualquier valor de A es válida la siguiente identidad que se conoce como **cuadrado de un binomio**:

$$(x + A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$$

Analicemos qué ocurre en los siguientes ejemplos:

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

Si comparamos la expresión $x^2 + 6x - 1$ con $x^2 + 2Ax + A^2$, vemos que ambas tienen el mismo término cuadrático, por lo que, comparando los términos lineales, podemos ver que se debe cumplir que $2A = 6$, es decir, que $A = 3$ para que sean iguales.

Ahora, si queremos escribir la expresión $x^2 + 6x - 1$ en términos del cuadrado de un binomio, necesitamos tener el término correspondiente a A^2. Para esto sumaremos y restaremos A^2, es decir, 3^2.

Entonces, $x^2 + 6x - 1 = \underbrace{x^2 + 2.3.x + 3^2}_{(x+3)^2} - 3^2 - 1 = (x+3)^2 - 10$.

Volviendo a la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$, tenemos que $(x+3)^2 - 10 = 0$

Recordando que lo queremos expresar de la forma $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$ tenemos en este caso que $a = 1$, $\alpha = -3$ y $\beta = -10$.

Las soluciones serían $x_1 = \sqrt{-\frac{-10}{1}} + (-3) = \sqrt{10} - 3$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{-10}{1}} + (-3) = -\sqrt{10} - 3$

$$2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Nuevamente, si comparamos $2x^2 - 5x + 6$ con $x^2 + 2Ax + A^2$, notamos la primera diferencia en el coeficiente del término cuadrático, por ello sacamos factor común 2 en la expresión. Nos queda $2x^2 - 5x + 6 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$. A continuación, con la expresión que se encuentra entre paréntesis se procede igual que en el ejemplo anterior.

Ahora comparamos $2Ax$ con $-\frac{5}{2}x$, de donde deducimos que $A = -\frac{5}{4}$. Falta, entonces, sumar y restar $\left(-\frac{5}{4}\right)^2$.

$$2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) = 2\left(\underbrace{x^2 + 2.\left(-\frac{5}{4}\right)x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2}_{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2} - \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 3\right)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

En este caso $\alpha = \frac{5}{4}$ y $\beta = \frac{23}{8}$.

Notemos que una vez que hemos sacado como factor común el coeficiente del término cuadrático, lo que debemos hacer es sumar y restar el coeficiente lineal dividido por 2, elevado al cuadrado.

En general, si queremos completar cuadrados en la expresión ax^2+bx+c, hacemos

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2.\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \end{aligned}$$

En resumen, para completar cuadrados debemos:

- Sacar como factor común el coeficiente que acompaña a x^2 (en la expresión general sería a).
- Sumar y restar dentro del paréntesis el segundo coeficiente sobre 2, al cuadrado.
- Asociar los tres primeros términos como el cuadrado de un binomio.
- Distribuir el coeficiente del término cuadrático.

El método de completar cuadrados no solo nos servirá para encontrar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, sino que los utilizaremos más adelante para llevar a su forma canónica la ecuación de una cónica, y también lo utilizaremos en Matemática A y B.

Si queremos hallar las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, podemos completar cuadrados como hicimos antes, lo que nos queda

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Si aplicamos raíz cuadrada a ambos lados, tenemos

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

es decir, que

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

por lo que

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Notemos que $|a| = a$ si $a > 0$, y $|a| = -a$ si $a < 0$, por lo que al considerar los signos $\pm$ estamos considerando ambas posibilidades, además de contemplar los posibles signos de $x + \frac{b}{2a}$.

Es decir, tenemos las soluciones

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Está fórmula es conocida como la **fórmula de *Bhaskara***[1] para hallar soluciones de la ecuación cuadrática.

> **Fórmula de Bhaskara:** Las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:
>
> $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recordemos que el símbolo $\pm$ es solo una notación. Sirve para indicar en una única expresión que hay dos valores posibles: uno que se obtiene cuando se utiliza el signo $+$ en la fórmula y otro cuando se utiliza el signo $-$.

Hay tres posibilidades para la cantidad de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (en este caso se dice que la solución es doble), o sin solución en los reales. La cantidad de soluciones depende del valor que tome $b^2 - 4ac$. A esta expresión la llamaremos **discriminante** y la denotaremos con la letra griega Δ (se lee delta).

Las tres posibilidades son:

- Si $\Delta > 0$, tenemos dos raíces reales distintas $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, tenemos dos raíces reales coincidentes $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, no tenemos raíces reales, es decir, la ecuación cuadrática no tiene solución.

Encontrar las soluciones, si existen, de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$

En este caso, tenemos que $a = 1, b = -1$ *y* $c = -6$.

Entonces, $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$, *por lo que la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas. Las mismas son*

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

[1]El primer registro que se tiene de esta fórmula es el tratado Lilavati, publicado en 1150 por el matemático y astrónomo indio Bhaskara (1114-1185).

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$

Por los tanto $S = \{3, -2\}$.

Encontrar las soluciones, si existen, de la ecuación $3x^2 + 12x + 12 = 0$

En este caso $a = 3, b = 12$ *y* $c = 12$.

Entonces, $\Delta = (12)^2 - 4.3.(12) = 144 - 144 = 0$, *por lo que la ecuación solo tendrá una solución real doble. La misma es*

$$x = \frac{-12 + \sqrt{(12)^2 - 4.3.(12)}}{2.3} = \frac{-12+0}{6} = -2$$

Por lo tanto $S = \{-2\}$.

Encontrar las soluciones, si existen, de la ecuación $4x^2 - 2x + 6 = 0$

Como $a = 4, b = -2$ *y* $c = 6$ *tenemos* $\Delta = (-2)^2 - 4.4.6 = 4 - 96 = -92 < 0$, *por lo que la ecuación no tiene solución real.*

Por lo tanto $S = \emptyset$.

Actividades

17. Completando cuadrados, encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

b) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

c) $-x^2 = -4x - 21$

d) $2x^2 - x + 3 = -1$

e) $\frac{x^2}{4} + x = 8$

f) $4x^2 + 10x + \frac{9}{4} = \frac{64}{9} + 4x$

g) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$

18. Calcular el discriminante de las siguientes ecuaciones y, sin resolver la ecuación, determinar la existencia de soluciones reales. Si existen, hallar los valores de las soluciones utilizando la fórmula de Bhaskara.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

b) $2x^2 - x + 3 = -1$

c) $x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

d) $\frac{2}{3}x^2 - 2x = \frac{16}{3}$

e) $-x^2 = -4x - 21$

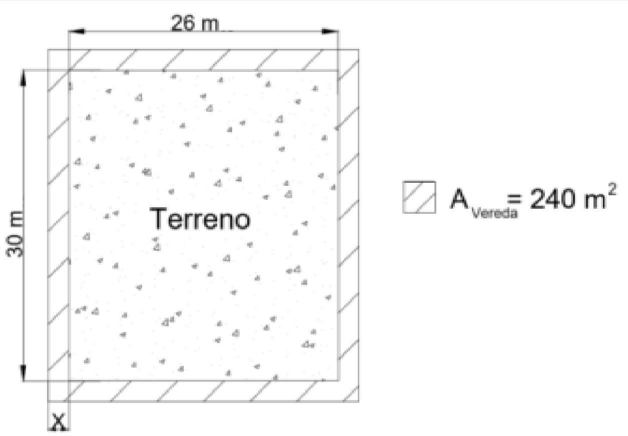
19. Encontrar el valor de k para que la ecuación $x^2 - \frac{(k+1)}{3}x + \frac{k}{9} = 0$ admita una única solución real. Hallar dicha solución.

20. Encontrar el o los valores de k para que la ecuación $(k+3)x^2 - kx + 1 = 0$ tenga solución única. Para cada valor de k hallado, hallar la única solución de la ecuación.

Problemas y aplicaciones de ecuaciones cuadráticas

Muchas situaciones reales se pueden modelizar por medio de expresiones cuadráticas. Por ejemplo, situaciones vinculadas al cálculo de áreas o la posición de un objeto que se mueve. En consecuencia, cuando en estas situaciones se presenta algún problema, para resolverlo se debe buscar la solución de una ecuación cuadrática. Para ilustrar, veamos el siguiente ejemplo.

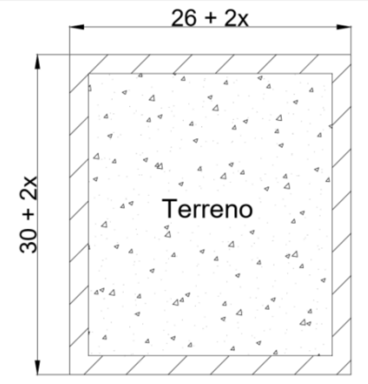
Un terreno rectangular de 26 metros de ancho por 30 metros de largo se debe rodear de una vereda de ancho uniforme. Si el área total de la vereda es de $240\ m^2$ ¿cuál es el ancho de la vereda?



Observando la figura y los datos del problema, notamos que resulta conveniente definir x como el ancho en metros de la vereda y x es entonces la incógnita de la ecuación que queremos plantear.

Sabemos que el terreno rectangular tiene superficie: $26\ m.30\ m = 780\ m^2$.

Ya que la vereda rodea al terreno, observemos que el largo y ancho de la figura más grande serán de $30 + 2x$ y de $26 + 2x$ respectivamente.



Notemos que los $240\ m^2$ de vereda se corresponden con la resta de la superficie del rectángulo mayor menos la superficie del terreno. Esto nos lleva a plantear la ecuación

$$(30 + 2x).(26 + 2x) - (26.30) = 240$$

$$780 + 60x. +52x + 4x^2 - (780) = 240$$

Agrupando los términos, resulta quedar la ecuación cuadrática

$$4x^2 + 112x - 240 = 0$$

de donde podemos observar que $a = 4$, *que* $b = 112$ *y que* $c = -240$.

Como $\Delta = (112)^2 - 4.4.(-240) = 16384 > 0$ *sabemos que la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales.*

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida y hallamos esas dos soluciones que son:

$$x_1 = -30 \text{ y } x_2 = 2.$$

Recordemos que estamos en un contexto donde x *representa la medida del ancho de una vereda. Por esta razón, aun cuando* x_1 *sea solución de la ecuación cuadrática planteada, no puede ser solución para el problema por ser negativa. Por lo tanto, consideramos que* $x_2 = 2\ m$ *será el ancho de la vereda.*

<u>Respuesta</u>: El ancho de la vereda será de 2 *metros.*

Si queremos verificar la solución hallada podemos calcular la superficie de la vereda, resultando: $34.30 - 780 = 1020 - 780 = 240$.

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, sabiendo que si midiera $4\ cm$ *menos su área sería un noveno del área original?*

Si llamamos x *al lado del cuadrado, su área será* x^2, *y si el lado midiese* 4 *centímetros menos, tenemos que ahora el lado mide* $x - 4$, *por lo que su área es* $(x-4)^2$

Planteando que el área del nuevo cuadrado será un noveno del área del cuadrado original obtenemos la siguiente igualdad: $(x-4)^2 = \frac{1}{9}.x^2$

Operando tenemos que

$$9.(x^2 - 8x + 16) = x^2$$

$$9x^2 - 72x + 144 - x^2 = 0$$

$$8x^2 - 72x + 144 = 0$$

$$8.(x^2 - 9x + 18) = 0$$

Si utilizamos la fórmula de Bhaskara obtenemos que $x_1 = 6$ *y* $x_2 = 3$.

Sin embargo, solo x_1 *es respuesta de nuestro problema, ya que si el lado midiese* $3\ cm$, *no se le podrían restar 4* cm.

<u>Respuesta</u>: El lado del cuadrado debe ser de $6\ cm$.

Comprobación: Si el lado del cuadrado es de $6\ cm$, *entonces el área es de* $36\ cm^2$. *Si ahora les restamos* $4\ cm$, *tenemos que el lado mide* $2\ cm$, *y el área* $4\ cm^2$, *que es un noveno del área original, ya que* $4\ cm^2 = \frac{36}{9}\ cm^2$.

Actividades

21. Un triángulo equilátero tiene una altura de $20\ cm$. ¿Cuál es su perímetro?
22. En un triángulo equilátero ABC el lado $AB = x^2 + x$ y el lado $BC = 5x + 5$. Calcular el perímetro y el área del triángulo.
23. Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que la suma de los cuadrados de los dos primeros supera en 84 al cuadrado del tercero. Determinar cuáles son esos números.
24. Dos bicicletas parten simultáneamente de un mismo punto, una hacia el sur y otra hacia el este. Al cabo de unos instantes, la distancia entre ellas es de 100 metros. ¿Cuánto recorrió cada bicicleta si se sabe que la que se dirige al sur hizo 20 metros más que la otra?
25. Determinar el número entero del cual se sabe que si sumamos el tercio de su siguiente más el cuadrado de su anterior da como resultado dos unidades menos que su cuádruple.
26. La diferencia entre el cuadrado de la edad de Matías hace 5 años, y 10 veces su edad actual es 94, ¿cuál era su edad hace 5 años?

Aplicación especial de ecuaciones cuadráticas

Ciertas ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones cuadráticas por medio de una sustitución adecuada.

En particular, una **ecuación bicuadrática** es una ecuación que se puede expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde a, b y c son tres números reales y $a \neq 0$.

Para resolver una ecuación bicuadrática hacemos el cambio de variable $x^2 = u$, por lo tanto, $x^4 = u^2$.

La ecuación expresada en función de u es $au^2 + bu + c = 0$.

Una vez resuelta esta ecuación, sustituiremos sus soluciones en $x^2 = u$, y obtenemos así las soluciones de la ecuación en x.

Utilizando un cambio adecuado, resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Haciendo el cambio $x^2 = u$, obtenemos la ecuación $u^2 - 13u + 36 = 0$.

Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 4$ y $u_2 = 9$.

Si $u_1 = 4$, entonces $x^2 = 4$, de donde $x_1 = 2$ o $x_2 = -2$.

Si $u_2 = 9$, entonces $x^2 = 9$, de donde $x_3 = 3$ o $x_4 = -3$.

Concluimos, entonces, que el conjunto solución de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es $S = \{2, -2, 3, -3\}$.

En el caso de que algún valor de u sea negativo, no se obtendrán soluciones de x provenientes de ese valor de u. Por ejemplo, si obtuviésemos que $u_1 = 3$ y $u_2 = -4$, tendríamos que $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Veamos ahora otro ejemplo de una ecuación que no es bicuadrática, pero en la que se podrá aplicar una sustitución conveniente. A estas ecuaciones las llamaremos **ecuaciones del tipo bicuadráticas.**

Utilizando un cambio de variable adecuado, resolver la ecuación

$$(x-2)^6 - (x-2)^3 - 2 = 0.$$

Proponiendo el cambio $u = (x-2)^3$, *tenemos que* $u^2 = (x-2)^6$, *de donde la ecuación puede expresarse como* $u^2 - u - 2 = 0$.

Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 2$ *y* $u_2 = -1$.

Si $u_1 = 2$, *entonces* $(x-2)^3 = 2$, *de donde*

$$x_1 = \sqrt[3]{2} + 2.$$

Si $u_2 = -1$, *entonces* $(x-2)^3 = -1$, *de donde*

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} + 2 = -\sqrt[3]{1} + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Por lo tanto, $S = \left\{\sqrt[3]{2} + 2 , 1\right\}$.

Actividades

27. Encontrar, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones. En caso de ser necesario, utilizar una sustitución adecuada.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

b) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

c) $(x+3)^4 - \frac{5}{4}(x+3)^2 = \frac{-1}{4}$

d) $x^7 - 4x^6 + 4x^5 = 0$

e) $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad en la que figuran variables o **incógnitas**. Resolverla es encontrar los valores de esas variables o incógnitas que la satisfacen.

> Por ejemplo, las siguientes expresiones son inecuaciones:
>
> $$4.x < 20$$
>
> $$-x > 6$$
>
> $$2.x \leq 8$$
>
> $$10.x \geq 90$$

Símbolos $<, >, \leq$ y $\geq$

Cuando tenemos dos números reales, siempre podemos compararlos para saber si uno es más grande que el otro o son iguales. Esto se puede representar usando símbolos matemáticos.

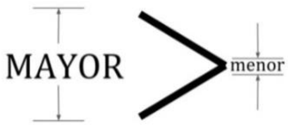
Si queremos representar que un número es mayor que otro, usaremos el símbolo **mayor que**, que se representa por “$>$”. En este caso, se ubica el número mayor en el lado abierto del símbolo $>$ y el número menor al otro lado.

Tomemos como ejemplo el 3 y el 5. Sabemos que el 5 representa una mayor cantidad de elementos que el 3. Debemos escribir, por lo tanto, $5 > 3$. Esta expresión debe ser leída como "cinco es mayor que tres".

También usamos el símbolo $<$, que es leído como **menor que**. Con este símbolo podemos representar que tres es menor que cinco como $3 < 5$.

$a > b$	$b < a$
a es mayor que b	b es menor que a

Para acordarnos de la dirección en que van, recordemos que $MAYOR > menor$ o $menor < MAYOR$:



Es importante notar que cuando usamos varios signos en una misma expresión, solamente podemos utilizar el signo menor junto con menor o igual, o mayor junto con mayor o igual. Por ejemplo, $3 < 5 < 8$, pero no es correcto escribir $2 < 5 > 4$.

> Si queremos comparar los números 11 y 54, podemos decir que $11 < 54$, que $54 > 11$.

Por la misma razón, el signo $=$ define que ambas cantidades son iguales, no hay una mayor que otra. Por ejemplo, $3 + 5 = 8$.

Cuando se cumple alguna de las dos condiciones en una misma afirmación, podemos utilizar el símbolo de “mayor o igual que” representado por “$\geq$” o “menor o igual que”, representado por “$\leq$”. Al estudiar conjuntos numéricos, veremos más ejemplos del uso de estos dos símbolos.

> En el ejemplo anterior donde comparamos los números 11 y 54, también podríamos expresar que $11 \leq 54$ o que $54 \geq 11$.

> Si x representa la edad a la que se puede votar en Argentina, podríamos indicar que se puede votar desde los 16 años de la siguiente manera:
> $$x \geq 16$$

Resolución de inecuaciones

Para resolver una inecuación, también es conveniente aplicar algunas propiedades (Leyes de monotonía) y así obtener una inecuación que tenga las mismas soluciones y sea más sencilla.

- Cuando el mismo número se suma o resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.
- El sentido de la desigualdad se conserva si ambos lados se multiplican o dividen por el mismo número positivo.
- Si se multiplica o divide por un número negativo en ambos lados de una desigualdad, se debe invertir el sentido de la desigualdad.

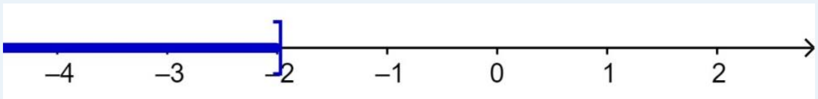
> Por ejemplo, si tenemos la inecuación $x + 3 > 5$ y restamos 3 a ambos miembros, tenemos
> $$x + 3 - 3 > 5 - 3 \qquad \rightarrow \qquad x > 2$$
> Entonces, todos los valores de x que sean mayores que 2 cumplirán esta desigualdad.

> Si tenemos la inecuación $3x > 6$, podemos dividir en ambos lados por 3, que es un número positivo, para obtener
> $$\frac{3}{3}x > \frac{6}{3} \qquad \rightarrow \qquad x > 2$$
> Y podemos concluir que los valores de x que son mayores que 2 satisfacen esta inecuación.

> Dada la inecuación $-x < -1$, podemos multiplicar en ambos lados de la desigualdad por -1, que es un número negativo, por lo tanto hay que tener cuidado en invertir el signo de la desigualdad:
> $$(-1).-x > (-1).(-1) \qquad \rightarrow \qquad x > 1$$
> Entonces, todos los valores de la variable x que sean mayores que 1 cumplen la inecuación dada.

El conjunto solución de una inecuación es el conjunto de números reales que, al ser reemplazados por la variable, hacen cierta la desigualdad. Este conjunto es un intervalo[2] que se puede expresar como conjunto, con la notación de intervalos, o representar sobre la recta real.

> Dada la inecuación $x + 2 \leq -1$, podemos operar para obtener
> $$x + 2 - 2 \leq -1 - 2 \quad \rightarrow \quad x \leq -3$$
> Por lo tanto, la solución es $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\}$ o, en forma equivalente, el intervalo $(-\infty, -3]$.

> Si tenemos la inecuación $-5x \geq 10$ operamos, y tenemos
> $$\frac{-5}{-5}x \leq \frac{10}{-5} \quad \rightarrow \quad x \leq -2$$
> Observar que dividimos en ambos lados de la desigualdad por -5, que es un número negativo, por lo tanto, se invierte el signo de la desigualdad.
> Es decir, que la solución es $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}$ o, en forma equivalente, el intervalo $(-\infty, -2]$ y gráficamente tenemos
>
> 
>

Resumiendo, las leyes de monotonía para una inecuación de la forma $A < B$ son:

<table>
<tr><td colspan="3">$A < B$</td></tr>
<tr><td>Ley de la Suma</td><td colspan="2">Ley del producto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A + C < B + C$</td><td>$C > 0$</td><td>$C < 0$</td></tr>
<tr><td>$A.C < B.C$</td><td>$A.C > B.C$</td></tr>
<tr><td>Se mantiene la desigualdad</td><td>Cambia la desigualdad</td></tr>
</table>

Actividades

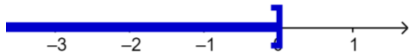
28. Determinar si el número -1 verifica las siguientes inecuaciones:
    a) $-2x - 5 \leq x + 1$
    b) $4x - 2 > -x - 4$
29. Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:
    a) $5x + 4 \leq x - 8$
    b) $3x < 6x + 8$
    c) $\frac{x}{2} + 3 > 0$
    d) $-3(x + 4) \geq 9$

[2] En otro tipo de inecuaciones (que no se estudiarán en esta materia), el conjunto solución puede ser un intervalo o unión de intervalos.

30. Escribir una inecuación que solamente la cumplan los números que son menores o iguales que 2.

31. Escribir dos inecuaciones distintas que tengan como solución el intervalo $(3, \infty)$.

32. Asociar cada inecuación de la primera columna con la solución representada por un intervalo de la segunda columna.

$-2x + 5 \leq 7$	
$-3x + 11 < 4x + 11$	
$-3x + 11 \geq 4x + 11$	
$-x + 4 \geq 3$	

Polinomios

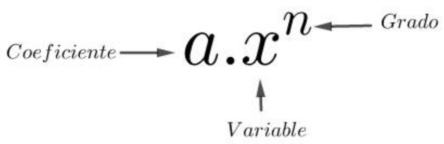
Un **polinomio** en la variable x es una expresión algebraica que puede expresarse de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

en la que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

Un **monomio** en una variable x es una expresión algebraica de la forma ax^n, en la que a es un número real y n es un número natural. Por lo tanto, un polinomio puede definirse como la suma de monomios.

Dado el monomio ax^n, con $a \neq 0$, la parte numérica a es el **coeficiente** del monomio y el exponente n de la variable x es el **grado** del monomio.



El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de sus términos o monomios. Si $a_n \neq 0$, tenemos que el grado es n y se denota $gr(P(x)) = n$.

El coeficiente a_n se llama **coeficiente principal**.

Si $a_n = 1$, el polinomio se llama **mónico.**

El término a_0 se conoce como término independiente. El término $a_1 x$ es el término lineal, $a_2 x^2$ es el término cuadrático, $a_3 x^3$ es el término cúbico, etc.

Es conveniente escribir el polinomio en forma reducida con sus términos ordenados de mayor a menor grado. Así, el polinomio $P(x) = x - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 3 - x^2 - 2$ escrito en forma ordenada y reducida resulta $P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$. Esta manera de escribir un polinomio nos permite identificar de forma rápida su grado y su término independiente. Además, nos facilitará las operaciones que debamos efectuar con él.

Utilizaremos letras mayúsculas para nombrar a los polinomios, por lo general $P, Q, R, S, \dots$ y se indicará entre paréntesis la variable correspondiente. Al conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales se lo denota $\mathbb{R}[x]$, donde $\mathbb{R}$ denota el conjunto al que pertenecen los coeficientes, y x es la variable.

Tradicionalmente se decía que el monomio estaba formado por un término y el polinomio estaba formado por la suma de al menos dos términos (si son dos se llama binomio, tres trinomio, cuatro cuatrinomio, etc.); sin embargo, cuando nos refiramos a los polinomios hablaremos de monomios, binomios, trinomios y, en general, a expresiones de uno o varios términos.

Un polinomio particularmente importante es el **polinomio nulo**, que corresponde a tomar todos los coeficientes a_i como cero y lo denotamos $0(x)$. Este polinomio no tiene grado.

> $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$ es un trinomio de grado 2, con coeficiente principal 3 y término independiente 1.

$Q(x) = x^7 - 2x^5 + 4x^3 + 6x$ es un polinomio de grado 7, mónico. $Q(x)$ está incompleto ya que no figuran todas las potencias hasta 7 (porque $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$).

$R(x) = 3$ es un monomio de grado 0, que solo consta del término independiente 3.

Aplicación de polinomios

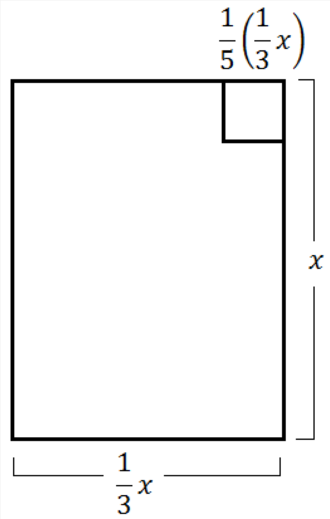
Los polinomios generalmente se aplican a la hora de calcular perímetros, áreas y volúmenes, pero la aplicación de los polinomios va más allá, y se usan mucho en ingeniería, medicina, ciencia y química, entre otros.

Se posee un terreno rectangular del que se sabe que la medida del frente mide un tercio de la medida del largo y que en el terreno se quiere hacer un corral cuadrado cuyos lados midan $\frac{1}{5}$ de la medida del frente.

¿Cuántos metros de alambre habrá que comprar para poder cercar el terreno y el corral, sabiendo que el corral estará en una esquina del terreno?

¿Cuál es el área del terreno que queda por fuera del corral?

Primero podemos hacer un esquema gráfico donde volcaremos los datos



Entonces la cantidad de alambrado que necesitamos comprar queda expresado con el polinomio $P(x) = x + \frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right)$ *y si operamos nos queda* $P(x) = \frac{42}{15}x$.

Si ahora del mismo terreno queremos calcular cuál es el área que queda fuera del corral, lo que debemos hacer es calcular el área del terreno y a la misma restarle el área del corral.

Tenemos entonces que $A(x) = x.\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right).\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2 - \left(\frac{1}{15}x\right)^2 = \frac{74}{225}x^2$.

Actividades

33. Determinar cuál de las siguientes expresiones son polinomios, y en el caso de serlo hallar el grado, coeficiente principal y término independiente:

a) $M(x) = \frac{3}{x^2} + 2x + 1$

b) $P(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^6 - 0x^9 + \sqrt{2} + 1$

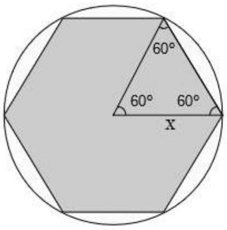
c) $Q(x) = x^2 + 2x + x^5 - 2\sqrt{x}$

d) $E(x) = 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

e) $H(x) = \sqrt{2}.x^3 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x$

f) $N(x) = 5x^{-1} + 3x$

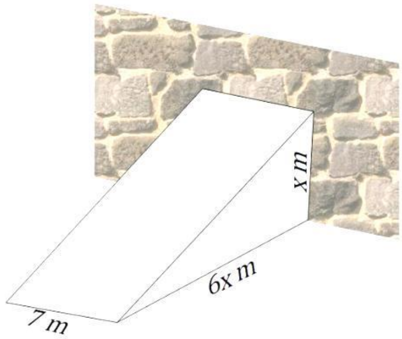
34. Obtener la expresión algebraica que representa el área de un hexágono regular inscripto en un círculo de radio x. Dicha expresión algebraica, ¿es un polinomio? Justificar.



35. Se quiere pintar una rampa de x metros de altura, una longitud horizontal de $6x$ metros, de 7 metros de ancho y tapas en los costados.

a) Determinar la expresión algebraica que representa el área a pintar. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justificar.

b) Si se desea rellenarla con cemento, determinar la expresión algebraica que representa el volumen a rellenar. ¿Dicha expresión algebraica es un polinomio? Justificar.



Igualdad de polinomios

Dos polinomios no nulos son iguales si y solo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado coinciden. Es decir, dados

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x^1 + b_0$$

tenemos que $P(x) = Q(x)$ si y solo si $n = m$, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, … $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0$.

Las igualdades anteriores se podrían haber resumido al pedir que $n = m$ y $a_i = b_i$ para $i = 0, \dots, n$.

> $P(x) = 9x^2 - x + 1$ y $Q(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$son dos polinomios distintos ya que el $gr(P(x)) = 2 \neq gr(Q(x)) = 3$.

$P(x) = x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = x^2 - 5x - 3$ son dos polinomios distintos ya que el coeficiente del término lineal de $P(x)$ es 2 y el del término lineal de $Q(x)$ es -5.

Dos polinomios son **opuestos** si y solo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son opuestos. Es decir, para el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

su opuesto será

$$Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x^1 - a_0$$

y por lo general se lo denotará como $-P(x)$ al opuesto de $P(x)$.

El opuesto de $P(x) = 3x^4 - 8x^2 + x$ es

$$-P(x) = -3x^4 + 8x^2 - x.$$

Los polinomios no tienen signos, en el sentido de que no existe un polinomio positivo, o uno negativo. $-P(x)$ solo representa un polinomio en el cual los coeficientes son los opuestos a los coeficientes de $P(x)$.

Actividades

36. Dados $P(x) = 3x^2 + 6x - 2$ y $Q(x) = ax^2 + 2ax - b$. Determinar el valor de a y de b para que $P(x) = Q(x)$.
37. Determinar el opuesto de $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 8$.

Operaciones entre polinomios

Suma

Para sumar polinomios veamos el procedimiento con un ejemplo:

Suma de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para sumar dos polinomios, se agrupan los términos del mismo grado y se suman sus coeficientes.	Si tenemos los polinomios $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 3$, tenemos que $P(x) + Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) + (2x^3 - 6x^2 + 5x - 3) = 3x^4 + (5+2)x^3 - 6x^2 + (-2+5)x + (3-3)$ $= 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 3x$

Para restar dos polinomios, hacemos como con los números enteros, pensamos a la resta como la suma del opuesto, es decir

$$P(x) - Q(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big)$$

Observemos que si $gr(P(x)) \neq gr(Q(x))$, el grado de la suma será igual al mayor grado entre los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, pero *si* $gr(P(x)) = gr(Q(x))$ podría pasar que el grado disminuya.

> Si $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = -2x^2 + 2x - 5$, tenemos que
> $$P(x) + Q(x) = (2x^2 - 3x + 4) + (-2x^2 + 2x - 5)$$
> $$= (2-2)x^2 + (-3+2)x + (4-5) = -x - 1$$

Propiedades de la suma de polinomios

Dados $P(x), Q(x)$ y $R(x) \in \mathbb{R}[x]$, valen las siguientes propiedades:

- $gr(P(x) + Q(x)) \leq max\{gr(P(x)), gr(Q(x))\}$ o $P(x) + Q(x)$ no tiene grado (en el caso que $Q(x)$ sea el opuesto de $P(x)$).

Además, en la suma de polinomios valen las mismas propiedades que cumplen los enteros, es decir:

- Ley de cierre: la suma de dos polinomios da como resultado un polinomio.
- Conmutatividad: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$.
- Asociatividad: $P(x) + (Q(x) + R(x)) = (P(x) + Q(x)) + R(x)$.
- Existencia del Neutro: $P(x) + 0(x) = P(x)$.
- Existencia del Opuesto: $P(x) + (-P(x)) = 0(x)$.

Producto

Para multiplicar monomios, se asocian y operan los coeficientes y las partes de las potencias por separado, recordando que, al multiplicar potencias de igual base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$ax^m . bx^n = (a.b)x^{m+n}$$

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes.

Por ejemplo, si $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$, entonces para multiplicarlos debemos proceder como en el siguiente cuadro:

Multiplicación de polinomios	
Procedimiento	**Ejemplo**
• Escribimos los dos polinomios, uno debajo del otro • Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo polinomio. • Sumamos los polinomios obtenidos.	$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \\ \text{x} \quad -4x^3 + 2x - 6 \\ \hline -30x^3 - 18x^2 + 18x - 24 \\ 10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x \quad \\ -20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3 \qquad\qquad\qquad \\ \hline -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24 \end{array}$ Entonces $P(x).Q(x) = -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$

Este mismo producto se puede realizar sin alinear los términos resultantes del producto por cada monomio, simplemente aplicando la propiedad distributiva y agrupando después los términos del mismo grado, pero hay que ser cuidadosos para no olvidarnos de ningún término.

$(5x^3 + 3x^2 - 3x + 4).(-4x^3 + 2x - 6)=$

$-20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3 + 10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x - 30x^3 - 18x^2 + 18x - 24=$

$-20x^6 - 12x^5 + (10 + 12)x^4 + (-30 + 6 - 16)x^3 + (-18 - 6)x^2 + (18 + 8)x - 24=$

$-20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24.$

Después de efectuar la distributiva debemos contar la cantidad de términos. Esta debe ser igual al producto de la cantidad de términos de $P(x)$ por la cantidad de términos de $Q(x)$. En nuestro ejemplo, $P(x)$ tiene cuatro términos, y $Q(x)$ tiene tres, por lo que después de la distributiva debemos tener doce términos. Una vez que reacomodamos y sumamos, esta cantidad puede disminuir, como se puede observar en el ejemplo anterior.

Propiedades del producto

Dados $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, (con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios no nulos) se tiene que

$$gr(P(x).Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$$

Al igual que con la suma, las propiedades del producto se mantienen iguales a las de los enteros. Es decir, dados $P(x), Q(x)$ y $R(x) \in \mathbb{R}[x]$:

- Ley de cierre: El producto de dos polinomios es también un polinomio.
- Asociatividad: $P(x).(Q(x).R(x)) = (P(x).Q(x)).R(x)$
- Conmutatividad: $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$
- Existencia del neutro: Existe el polinomio $Q(x) = 1$, tal que $P(x).1 = P(x)$
- No existe el inverso para todo polinomio. En efecto, si se trata de un polinomio $P(x)$, tal que $gr(P(x)) \geq 1$, al multiplicarlo por cualquier otro polinomio, el resultado tiene grado mayor o igual a 1 (o es el nulo), y para ser el polinomio 1 debe tener grado 0.

Propiedad distributiva

Sigue valiendo la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, es decir

$$P(x).(Q(x) + R(x)) = P(x).Q(x) + P(x).R(x)$$

Supongamos que $P(x) = 4x^3 - x^2$, $Q(x) = x^2 - 3$ y $Q(x) = 3x + 1$. Si queremos calcular $P(x).(Q(x) + R(x))$, tendríamos:

$$P(x).\big(Q(x) + R(x)\big) = (4x^3 - x^2).\big((x^2 - 3) + (3x + 1)\big)$$
$$= (4x^3 - x^2).(x^2 - 3 + 3x + 1)$$
$$= (4x^3 - x^2).(x^2 + 3x - 2)$$
$$= 4x^5 + 12x^4 - 8x^3 - x^4 - 3x^3 + 2x^2$$
$$= 4x^5 + 12x^4 - x^4 - 8x^3 - 3x^3 + 2x^2$$
$$= 4x^5 + 11x^4 - 11x^3 + 2x^2$$

Actividades

38. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^2 + 5x - 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + 5$

$R(x) = x + 2$ $\qquad$ $S(x) = 3x + 3$

Calcular y determinar el grado de los polinomios resultantes de hacer los siguientes cálculos:

a) $P(x) - S(x)$
b) $R(x).S(x)$
c) $Q(x) + R(x) + S(x)$
d) $\big(P(x) + R(x)\big) \cdot Q(x)$
e) $S(x) \cdot R(x) - P(x)$
f) $\big(P(x) + R(x)\big) \cdot \big(Q(x) - P(x)\big)$

Algunos productos especiales: Diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto

- $(x + a).(x - a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$
- $(x + a)^2 = (x + a).(x + a) = x^2 + a.x + a.x + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Notar que $x - b = x + (-b)$, por lo que podemos considerar que el desarrollo de $(x - b)^2$ es un caso particular del desarrollo de $(x + a)^2$, tomando $b = -a$ y haciendo uso de la regla de los signos.

- $(x - a)^2 = (x)^2 + 2.(x)(-a) + (-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
- $(x + a)^3 = (x + a)^2.(x + a) = (x^2 + 2ax + a^2).(x + a)$
  $= x^3 + 2ax^2 + a^2x + ax^2 + 2a^2x + a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$
- $(x - a)^3 = (x)^3 + 3.(x)^2(-a) + 3(x)(-a)^2 + (-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Resumiendo, tenemos:

$(x+a).(x-a) = x^2 - a^2$	Diferencia de cuadrados
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	Trinomio cuadrado perfecto de la suma
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$	Trinomio cuadrado perfecto de la resta
$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	Cuatrinomio cubo perfecto de la suma
$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$	Cuatrinomio cubo perfecto de la resta

Actividades

39. Desarrollar los siguientes productos especiales

a) $(x-4).(x+4)$ b) $(x+6)^2$ c) $(x-4)^2$

d) $(x+1)^3$ e) $(x-2)^3$

40. Comprobar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente igualdad

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

División

Algoritmo de la división

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(\mathrm{x})$ con $Q(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $C(\mathrm{x})$, llamado cociente, y $R(x)$, llamado resto, tales que

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

con $R(x) = 0$ o $gr(R(x)) < gr(Q(x))$.

$$\begin{array}{rr|l l} \textit{Dividendo} \rightarrow & P(x) & \underline{\;Q(x)\;} & \leftarrow \textit{Divisor} \\ \textit{Resto} \rightarrow & R(x) & \;C(x) & \leftarrow \textit{Cociente} \end{array}$$

Por la propiedad vista sobre el grado del producto, podemos deducir que

$$gr\big(P(x)\big) = gr\big(Q(x)\big) + gr\big(C(x)\big)$$

En el caso en el que $gr\big(P(x)\big)$ es menor que $gr\big(Q(x)\big)$, se tiene que $C(x) = 0$ y $R(x) = P(x)$, ya que $P(x) = Q(x).0 + P(x)$.

División tradicional

Para dividir dos polinomios procedemos según el siguiente cuadro:

División de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo está incompleto, dejamos espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan o los completamos con ceros.	Divide el polinomio $3x^5+2x^3-x^2-4$ por el polinomio x^3+2x^2+1 $3x^5 \quad +2x^3-x^2 \quad -4 \;\;\vert\;\; x^3+2x^2+1$
Dividimos el primer monomio del dividendo (en este caso $3x^5$) por el primer monomio del divisor (x^3). Multiplicamos el cociente obtenido por el divisor y escribimos el resultado debajo del término de igual potencia.	$3x^5 \quad +2x^3 \; -x^2 \quad -4 \;\;\vert\;\; x^3+2x^2+1$ $3x^5+6x^4 \quad +3x^2 \qquad\qquad 3x^2$
Restamos el dividendo con el producto obtenido.	$3x^5 \quad +2x^3 \; -x^2 \quad -4 \;\;\vert\;\; x^3+2x^2+1$ $- \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2$ $3x^5+6x^4 \quad +3x^2$ $-6x^4+2x^3-4x^2 \quad -4$
Se repite el mismo proceso considerando el primer monomio del resultado de la resta (en este caso $-6x^4$).	$3x^5 \quad +2x^3 \; -x^2 \quad -4 \;\;\vert\;\; x^3+2x^2+1$ $- \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2-6x$ $3x^5+6x^4 \quad +3x^2$ $-6x^4+2x^3-4x^2 \quad -4$ $-6x^4-12x^3 \quad -6x$
El proceso continúa hasta que se obtiene un resto de grado menor que el grado del divisor. En el ejemplo, el grado del divisor es 3 y hemos obtenido un resto de grado 2.	$3x^5 \quad +2x^3 \; -x^2 \quad -4 \;\;\vert\;\; x^3+2x^2+1$ $- \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2-6x+14$ $3x^5+6x^4 \quad +3x^2$ Cociente $-6x^4+2x^3-4x^2 \quad -4$ $-$ $-6x^4-12x^3 \quad -6x$ $14x^3-4x^2+6x-4$ $-$ $14x^3+28x^2 \quad +14$ $-32x^2+6x-18$ Resto

Divisibilidad

Un polinomio es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio. Un polinomio es divisor de otro, si al dividir el segundo con el primero la división es exacta. Es decir, dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, diremos que $Q(x)$ divide a $P(x)$ si existe otro polinomio $R(x)$ tal que $P(x) = Q(x).R(x)$. En este caso es equivalente a decir que:

- $Q(x)$ divide a $P(x)$.
- $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.
- $Q(x)$ es factor de $P(x)$.
- $P(x)$ es un múltiplo de $Q(x)$.
- $Q(x)$ es un divisor de $P(x)$.

Si $Q(x) = x - 1$ y $P(x) = x^2 - 1$, tenemos que $Q(x)$ divide a $P(x)$ ya que existe $R(x) = (x + 1)$ tal que

$Q(x).R(x) = (x - 1).(x + 1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1 \quad = P(x)$

Actividades

41. Efectuar las siguientes divisiones, indicando en cada ítem el polinomio cociente y el polinomio resto.
   a) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x + 2)$
   b) $(4x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 21x^2) : (x^7 + 3x)$
   c) $(2x^3 - 24x^2 + 4x^4 + 18x) : (2x^3 - 3x)$
   d) $(4x^3 - 3x^2 + 7) : (2x - 6)$
   e) $(x^3 + 3x^2 - 4x - 8) : (2x + 1)$
42. Escribir el algoritmo de la división obtenido al efectuar las divisiones del ejercicio anterior. Y, en cada caso, señalar cuándo el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

Regla de Ruffini

Para el caso especial en el que se dividen dos polinomios y el divisor es un binomio lineal de la forma $(x - a)$ con $a \in \mathbb{R}$, existe un procedimiento llamado **Regla de Ruffini**[3], que permite encontrar fácilmente al cociente y al resto.

Utilizando la Regla de Ruffini, los coeficientes del cociente se obtienen así: el primer coeficiente de $C(x)$ es igual al primer coeficiente de $P(x)$, y cada uno de los sucesivos coeficientes de $C(x)$ es igual al coeficiente siguiente de $P(x)$ más el producto del coeficiente anterior de $C(x)$ por a. El último número así obtenido es el resto de la división.

Veamos un ejemplo para que quede más claro. Sea $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12$ y $D(x) = x - 3$, entonces, para efectuar la división utilizaremos la siguiente disposición práctica: escribimos los coeficientes del polinomio $P(x)$ ordenados de acuerdo a las potencias decrecientes de x y de manera completa en la fila superior, y el valor de a a la izquierda de la línea vertical.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 0 & -12 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \boxed{} \end{array}$$

El primer coeficiente de $P(x)$ coincide con el primer coeficiente que buscamos. Lo repetimos en la última fila.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 0 & -12 \\ 3 & & & & \\ \hline & 2 & & & \boxed{} \end{array}$$

[3]Esta regla se conoce así, pues fue publicada por Paolo Ruffini (1765-1822) un matemático, filósofo y médico italiano.

Multiplicamos ese coeficiente por a y escribimos el resultado debajo del siguiente coeficiente de $P(x)$. Luego sumanos y así obtenemos el segundo coeficiente buscado.

	2	3	0	−12
3		6		
	2	9		

Repetimos el procedimiento de multiplicar por a y luego sumar al coeficiente correspondiente de $P(x)$ para, así, obtener el tercer coeficiente.

	2	3	0	−12
3		6	27	
	2	9	27	

Volvemos a repetir para, en este caso, obtener el resto.

	2	3	0	−12
3		6	27	81
	2	9	27	69

Por la regla de los grados, si llamamos $C(x)$ al polinomio cociente, sabemos que $gr\big(C(x)\big) = gr\big(P(x)\big) - 1$ por lo que, en este caso, el grado de $C(x)$ es 2. Como ya tenemos los coeficientes, podemos determinar que $C(x) = 2x^2 + 9x + 27$ y que $R(x) = 69$.

Si queremos dividir $P(x)$ por $(x + a)$, vamos a utilizar la misma regla, pero utilizando $-a$ del lado izquierdo de la línea vertical, ya que $(x + a) = \big(x - (-a)\big)$.

Actividades

43. Calcular el cociente y el resto de las siguientes operaciones, utilizando la Regla de Ruffini:

a) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x + 2) \;:\; (x - 2)$

b) $(x^3 + 1) : (x + 1)$

c) $(x^3 + 3x) \;:\; (x + 2)$

d) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$

Valor numérico

El **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por $P(a)$.

> El valor numérico de $P(x) = 4x^3 - 2x + 1$ en $x = 2$ es
>
> $$P(2) = 4.(2)^3 - 2.2 + 1 = 32 - 4 + 1 = 29.$$

A continuación, veremos un teorema muy útil que relaciona al resto de la división entre un polinomio $P(x)$ y un polinomio de la forma $(x - a)$ con el valor numérico que tiene el polinomio $P(x)$ en a, lo cual nos será de gran utilidad en todo del capítulo.

Teorema del Resto

El resto de la división del polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x=a$, es decir $P(a)$.

Es fácil ver por qué es válido este Teorema. Primero observemos que, por el algoritmo de la división, si dividimos $P(x)$ por $(x-a)$ el resto debe ser de grado 0, o ser el polinomio nulo, lo cual lo podemos resumir diciendo que $R(x)=R\in\mathbb{R}$, es decir, que es una constante.

Por otro lado, por el mismo algoritmo tenemos que $P(x)=(x-a).Q(x)+R$. Entonces, si evaluamos en el valor a, notamos que $P(a)=(a-a).Q(a)+R=0+R=R$, por lo que el valor numérico en $x=a$ es realmente el resto.

Este teorema permite, en particular, detectar fácilmente si un polinomio $P(x)$ es divisible por un polinomio de la forma $x-a$, simplemente viendo si $P(a)=0$ o $P(a)\neq 0$.

Si dividimos el polinomio $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$ por el polinomio $x-3$, obtenemos que el cociente es $x^2+8x+22$ y el resto es 42.

Por otro lado, si calculamos $P(3)$, obtenemos

$$P(3)=(3)^3+5.(3)^2-2.3-24=27+45-6-24=42.$$

De cualquiera de estas maneras podemos deducir que el polinomio $P(x)$ no es divisible por $(x-3)$, ya que el resto es 42 y no 0.

Actividades

44. Dados $\mathrm{P}(x)=3x^2+5x-1$ y $\mathrm{Q}(x)=x+2$ hallar los siguientes valores numéricos:
    a) $P(1)$ b) $P(-1)$ c) $Q(0)$ d) $Q(-2)$

45. Hallar el resto de dividir al polinomio $P(x)=x^3+2x^2-2x-12$ por los siguientes polinomios utilizando el Teorema del Resto:
    a) $(x+2)$ b) $(x+1)$ c) $(x-1)$ d) $(x-2)$

46. Utilizando el Teorema del Resto, determinar si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ en cada uno de los siguientes casos:
    a) $P(x)=x^4-1$ $Q(x)=x-1$
    b) $P(x)=x^5+\frac{1}{32}$ $Q(x)=x+\frac{1}{2}$
    c) $P(x)=3x^3+6x^2-x-7$ $Q(x)=x+1$
    d) $P(x)=x^4-54x^3-2x^2+7$ $Q(x)=x+3$

47. Encontrar el valor de k para que, al dividir el polinomio $P(x)=2x^2-kx+2$ por $(x-2)$, obtengamos resto 4. ¿Con qué teorema se puede justificar la respuesta?

48. Si se sabe que en la división de $P(x)=x^2-4x+3$ por $(x-c)$ se obtiene un resto igual a -1, ¿cuáles son los posibles valores de c?

49. Sea $P(x) = 24x^{100} + 36x^{50} - 25x^{25} + 50x^5 + 15x^3 - 5$.

a) Si se lo divide por $(x+1)$, ¿cuál es el resto?

b) ¿El polinomio $P(x)$ es divisible por $(x+1)$?

50. Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 + 2kx^2 - 3x + 5$ ¿Qué valor debe tomar k para que el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $(x+3)$ sea 10?

Generalización del Teorema del Resto y de Ruffini

Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ y $D(x) = 2x - 1$. Si queremos encontrar el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$, es claro que no podemos utilizar la Regla de Ruffini ni el Teorema del Resto como los vimos antes, ya que el divisor no tiene la forma $x - a$.

Para poder resolver esta situación, podemos hacer uso del algoritmo de la división, que nos asegura que existen $C(x)$ y $R(x)$ (que son únicos), tales que

$$P(x) = (2x-1).C(x) + R(x).$$

Sabemos que $R(x) = R$ es constante por el grado que tiene el divisor, y es el resto de dividir a $P(x)$ por $D(x)$, y que $C(x)$ es el cociente. En este caso, sacando factor común 2, podemos escribir la igualdad anterior como

$$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right).C(x) + R$$

De esta igualdad es fácil observar que:

- Al calcular el valor numérico de $P(x)$ en $x = \frac{1}{2}$ obtenemos que $P\left(\frac{1}{2}\right) = R$.
- La expresión también se puede escribir utilizando $C'(x) = 2C(x)$, teniendo
$$P(x) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right).C'(x) + R.$$

Notemos que $C'(x)$ y R son respectivamente el cociente y el resto de dividir a $P(x)$ por $x - \frac{1}{2}$.

Para el ejemplo, el resto de dividir a $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, por el Teorema del Resto es

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -\frac{29}{8}$$

Usando Ruffini para dividir $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1/2 & & 3/2 & -1/4 & 3/8 \\ \hline & 3 & -1/2 & 3/4 & \boxed{-29/8} \end{array}$$

de donde se concluye también que el resto de esta división es $-\frac{29}{8}$.

El cociente de dividir a $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es $C'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, por lo cual el cociente de dividirlo por $2x - 1$, es $C(x) = \frac{C'(x)}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$.

Esto nos permite generalizar el Teorema del Resto.

Generalización del Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(ax-b)$ es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Para obtener el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por otro polinomio de la forma $(ax-b)$, consideramos el algoritmo de la división resultando

$$P(x) = (ax-b).C(x) + R$$

Extraemos factor común a y trabajamos con $P(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right).\underbrace{(a.C(x))}_{C'(x)} + R$

Al efectuar la división por Ruffini de $P(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$, el resto que se obtiene es el mismo R, pero para obtener el cociente $C(x)$ dividimos por a al cociente $C'(x)$ obtenido por Ruffini.

Esto nos permite generalizar la Regla de Ruffini.

Generalización de la Regla de Ruffini

El cociente de la división de $P(x)$ por $ax-b$ es $\frac{C(x)}{a}$ donde $C(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ y el resto es $P\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x$ *y* $Q(x) = 2x - 6$, *hallar el cociente y el resto de dividir* $P(x)$ *por* $Q(x)$.

Notemos que $Q(x)$ *es un polinomio lineal, pero no es mónico. Por lo tanto, podemos realizar la división por la regla de Ruffini generalizada.*

Para esto, sacamos factor común 2 *en* $Q(x)$ *y obtenemos:* $Q(x) = 2(x-3)$. *Para utilizar la regla de Ruffini, el número que debemos colocar a la izquierda es 3:*

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & & 6 & 27 & 75 & 228 \\ \hline & 2 & 9 & 25 & 76 & \boxed{228} \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que el resto de la división es 228, *mientras que el cociente es:*

$$C(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 25x + 76}{2} = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{25}{2}x + 38$$

Podemos verificar el resto hallado por el Teorema del resto generalizado. Para ello, evaluamos $P(3) = 2.(3)^4 + 3.(3)^3 - 2.(3)^2 + 3 = 162 + 81 - 18 + 3 = 228$

Actividades

51. Calcular el cociente y el resto de la siguientes divisiones utilizando la generalización de Ruffini:

    a) $(x^4 - 2x^3 + x - 3) : (3x - 6)$

    b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (2x + 1)$

    c) $(8x^4 + 6) : (6x - 3)$

52. Para las divisiones del ejercicio anterior, comprobar el valor del resto utilizando la generalización del Teorema del Resto.

53. Calcular el valor de c para que el polinomio $P(x) = 9x^2 - cx + 4$ sea divisible por $Q(x) = 3x - 1$.

Raíces de un polinomio

El número real a es una **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Notemos que por el Algoritmo de la división y el Teorema del Resto, podemos deducir que si a es raíz de $P(x)$, entonces $P(x) = (x - a).C(x)$ para algún polinomio $C(x)$. Además, en ese caso, $gr\big(C(x)\big) = gr\big(P(x)\big) - 1$.

Tenemos, entonces, las siguientes equivalencias:

a es raíz de $P(x) \leftrightarrow P(a) = 0 \leftrightarrow (x - a)$ es factor de $P(x) \leftrightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$

Si $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ y calculamos $P(-4)$, tenemos que

$$P(-4) = (-4)^3 + 5.(-4)^2 - 2.(-4) - 24 = -64 + 80 + 8 - 24 = 0,$$

por lo que -4 es una raíz de $P(x)$, y por Ruffini podremos calcular $C(x)$.

Propiedad de raíces de polinomios

Si a es raíz de $P(x)$ y $Q(x) = k.P(x)$, entonces a también es raíz de $Q(x)$.

Sabemos que 2 es raíz de $P(x) = (x - 3)(x - 2)$.
Si tenemos el polinomio $Q(x) = 2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 3)(x - 2)$, tenemos que 2 es raíz de $Q(x)$, ya que $P(x)$ es un factor de $Q(x)$. Esto es fácil de verificar, ya que $Q(2) = 2.(2 - 3)(2 - 2) = 0$.

Una propiedad útil a la hora de encontrar las raíces de un polinomio es la siguiente:

Un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces reales.

Es decir, si tenemos un polinomio de grado n y ya le conocemos n raíces, sabemos que no hay más raíces.

En este curso solo trabajamos en el conjunto de los números reales, por lo tanto cuando hablemos de raíces nos estamos refiriendo solo a raíces reales.

> $P(x) = 3x - 2$ tiene una raíz: $x = \frac{2}{3}$.
>
> $Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ tiene dos raíces: $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.
>
> $R(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces.
>
> $S(x) = x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ solo tiene una raíz: $x = 0$.

Teoremas de Gauss[4] para hallar raíces enteras o racionales

Existen dos teoremas que nos van a ayudar a encontrar raíces de los polinomios con coeficientes enteros.

Teorema 1: Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz entera a, entonces a divide al término independiente.

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Si queremos encontrar las raíces de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, *sabemos que como el polinomio es de grado* 3 *va a tener, a lo sumo, tres raíces. También confirmamos que los coeficientes del polinomio son todos enteros. Buscamos, entonces, los divisores del término independiente, en este caso,* 4.

Divisores de $4 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$.

Utilizamos, entonces, el Teorema del Resto para ver cuáles de estos candidatos realmente son raíces.

Tenemos que:

$P(1) = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$, *entonces* 1 *es raíz de* $P(x)$.

$P(-1) = -1 - 1 + 4 + 4 = 6 \neq 0$, *entonces* -1 *no es raíz de* $P(x)$.

$P(2) = 8 - 4 - 8 + 4 = 0$, *entonces* 2 *es raíz de* $P(x)$.

$P(-2) = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$, *entonces* -2 *es raíz de* $P(x)$.

Como ya hallamos tres raíces, podremos finalizar la búsqueda. Por lo tanto, el conjunto de las raíces enteras de $P(x)$ *es:*

Raíces de $P(x) = \{1,2,-2\}$.

[4]En honor al matemático, astrónomo y físico alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$.

Si queremos hallar las raíces enteras de $P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$, lo primero que notamos es que los coeficientes del polinomio no son enteros, por lo que no podríamos aplicar el Teorema 1. Sin embargo, si llamamos $Q(x) = 2.P(x)$, por la propiedad anterior de las raíces, sabemos que $Q(x)$ debe tener las mismas raíces que $P(x)$ y, además, $Q(x) = x^2 + x - 2$ tiene todos los coeficientes enteros, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1. Por otra parte, sabemos, por el grado del polinomio, que podemos hallar, a lo sumo, dos raíces.

Buscamos los divisores del término independiente

$$\text{Divisores de } -2 = \{1, -1, 2, -2\}.$$

Tenemos, entonces, que:

$Q(1) = 1 + 1 - 2 = 0$, *entonces* 1 *es raíz de* $P(x)$.

$Q(-1) = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$, *entonces* -1 *no es raíz de* $P(x)$.

$Q(2) = 4 + 2 - 2 = 4 \neq 0$, *entonces* 2 *no es raíz de* $P(x)$.

$Q(-2) = 4 - 2 - 2 = 0$, *entonces* -2 *es raíz de* $P(x)$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\text{Raíces de } Q(x) = \text{Raíces de } P(x) = \{1, -2\}$$

Teorema 2: Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y tiene alguna raíz fraccionaria irreducible $\frac{p}{q}$, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal.

Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

Si queremos hallar las raíces racionales del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$, sabemos que existen, a lo sumo, dos raíces. Para ello debemos hallar los divisores del término independiente y los del coeficiente principal.

Tenemos entonces:

$$\text{Divisores de } -3 = \{1, -1, 3, -3\} \quad y \quad \text{Divisores de } 2 = \{1, -1, 2, -2\}$$

Formamos ahora el conjunto de fracciones donde el numerador es divisor del término independiente y el denominador es divisor del coeficiente principal. Por lo tanto

$$\text{Candidatos a raíces} = \left\{1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Haciendo cuentas, tenemos que $P(-3) = 18 - 15 - 3 = 0$ y $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$, por lo que

$$\text{Raíces de } P(x) = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$$

Estos resultados son conocidos como los **Teoremas de Gauss** para hallar raíces de polinomios.

Actividades

54. Hallar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$

b) $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

c) $R(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

d) $S(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$

55. Hallar las raíces racionales de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

b) $Q(x) = 50x^3 + 25x^2 - 2x - 1$

c) $R(x) = 8x^3 - 6x^2 - 5x + 3$

d) $S(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}\ x - \frac{3}{2}$

Factorización de polinomios

Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ es **irreducible** si no se puede escribir como producto de polinomios de la forma $P(x) = Q(x).R(x)$, donde $Q(x)$ y $R(x)$ tienen ambos grado menor que n o uno de ellos es mónico y con el mismo grado de $P(x)$ y el otro es una constante distinta de 1.

Se puede ver que los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son los mónicos de grado 1 (lineales), y los de grado 2 mónicos que no tienen raíces reales.

Los polinomios que no son irreducibles, se los llama **reducibles**.

> El polinomio $P(x) = x^2 + 4$ es irreducible, ya que, como no tiene raíces en los reales, no puede escribirse como el producto de dos polinomios de grado 1.

> El polinomio $P(x) = x^2 - 4$ es reducible, ya que
> $$x^2 - 4 = (x - 2).(x + 2).$$

> El polinomio $P(x) = 2x - 7$ es reducible, ya que lo podemos factorizar como $P(x) = 2.\left(x - \frac{7}{2}\right)$.

Descomposición factorial

El proceso de **factorizar un polinomio** consiste en expresarlo como producto de otros polinomios.

> Las siguientes son dos factorizaciones distintas del polinomio
> $$P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x:$$
> - $P(x) = Q(x).R(x)$, donde $Q(x) = 2x^2 + 4$ y $R(x) = x^2 - 3x$.
> - $P(x) = S(x).T(x)$, donde $S(x) = 2x$ y $T(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

Sin embargo, cuando hablamos de la **descomposición factorial** de un polinomio $P(x)$, nos referimos a la factorización de $P(x)$, en la cual todos sus factores son polinomios irreducibles o polinomios de grado 0 (una constante).

En el ejemplo anterior, la descomposición factorial de $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x$ es

$$P(x) = \underbrace{2}_{Constante} . \underbrace{(x^2+2).(x-3).x}_{\substack{Polinomios\\ irreducibles}}$$

Para hallar esta descomposición, se pueden utilizar distintos procedimientos o una combinación de ellos. Repasaremos algunos que nos serán útiles.

Factor común

Cuando hay un factor que está repetido en todos los términos de un polinomio podemos sacarlo como factor común.

Por ejemplo, si $P(x) = -3x^5 + 12x^4 - 15x^3$, podemos ver que el factor $-3x^3$ está en los tres términos del polinomio, por lo que podemos sacarlo como factor común y obtenemos

$$P(x) = -3x^3(x^2 - 4x + 5)$$

También podríamos considerar que el factor que es común en los tres términos del polinomio es $3x^3$, por lo que obtenemos:

$$P(x) = 3x^3(-x^2 + 4x - 5).$$

Actividades

56. Reconocer el factor que se repite en los términos de los siguientes polinomios y extraerlo como factor común:
    a) $P(x) = x^6 + 11x^4 - 2x^2$
    b) $Q(x) = -4x^3 - 2x^2$
    c) $R(x) = 14x^5 - 7x^3 + 21x$

Factor común por grupos

Hay algunos casos en los que se puede factorizar a un polinomio armando grupos de la misma cantidad de términos y sacando factor común en cada uno de ellos. Si al hacerlo obtenemos factores repetidos en cada grupo, podemos luego extraer como factor común los factores repetidos y, de esa manera, obtener una nueva expresión que esté escrita como producto de polinomios. Veamos un ejemplo.

Si tenemos el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, podemos separar los términos en dos grupos:

$$P(x) = \underbrace{x^3 + x^2}_{\text{Grupo 1}} + \underbrace{(-4x - 4)}_{\text{Grupo 2}}$$

Si extraemos x^2 como factor común en el grupo 1 y -4 como factor común en el grupo 2, tenemos

$$P(x) = x^2(x+1) - 4(x+1)$$

Ahora, dado que en ambos términos aparece el factor $(x+1)$, podemos sacarlo como factor común para obtener

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 4)$$

Como aún no obtuvimos la descomposición factorial de $P(x)$, podemos factorizar el factor $x^2 - 4$ para llegar a la expresión

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

Notemos que los grupos que armamos para factorizar podrían haber sido distintos y el resultado no hubiera cambiado, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

Si tenemos el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, podemos ordenar los términos de otra manera y armar otros grupos:

$$P(x) = \underbrace{x^3 - 4x}_{\text{Grupo 1}} + \underbrace{x^2 - 4}_{\text{Grupo 2}}$$

Si extraemos x como factor común en el grupo 1, tenemos

$$P(x) = x(x^2 - 4) + (x^2 - 4)$$

Ahora, dado que en ambos términos aparece el factor $(x^2 - 4)$, podemos sacarlo como factor común para obtener

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 4)$$

Finalmente, podemos factorizar el factor $x^2 - 4$ para llegar a la expresión

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

Aunque en el ejemplo anterior vimos que podía haberse agrupado de dos maneras diferentes, esto no siempre sucede y hay veces en que no hay manera de asociar términos para factorizar con este método. Por lo general, este método se utiliza cuando es muy evidente la existencia de términos comunes.

Actividades

57. Factorizar los siguientes polinomios aplicando el procedimiento de factorización por grupos:

a) $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

b) $Q(x) = x^2 + 2x - 5x - 10$

c) $R(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 4x^2 - 12x - 8$

d) $S(x) = x^5 + x^3 + 3x^4 + 3x^2$

Trinomio cuadrado perfecto

Si recordamos que $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, podremos factorizar muchas expresiones que provengan de un trinomio cuadrado perfecto.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 9$, podemos reconocer que es un caso particular de trinomio cuadrado perfecto, cuando $a = -3$. Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x-3)^2,$$

donde $x - 3$ es un polinomio mónico irreducible, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

Actividades

58. Escribir la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = x^2 + 12x + 36$

   b) $Q(x) = 2x^2 - 8x + 8$

   c) $R(x) = x^2 - 2x + 1$

   d) $S(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

Diferencia de cuadrados

Si recordamos que $x^2 - a^2 = (x-a).(x+a)$, podremos factorizar muchas otras expresiones.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = x^2 - 25$, podemos reconocer que es un caso particular de diferencia de cuadrados, cuando $a = 5$. Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x-5).(x+5),$$

donde $(x-5)$ y $(x+5)$ son polinomios mónicos irreducibles, por lo que tenemos la descomposición factorial de $P(x)$.

> Si $P(x) = x^2 - 2$, podemos notar que $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$ y, entonces, obtenemos que
>
> $$P(x) = x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right).\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Actividades

59. Factorizar los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = x^2 - 49$

   b) $Q(x) = 2x^2 - 32$

   c) $R(x) = x^4 - 16$

   d) $S(x) = x^2 - 10$

Factorización de polinomios de grado 2

Recordemos que los polinomios de grado 2 son aquellos de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde $a \neq 0$.

En los casos anteriores repasamos descomposiciones factoriales para algunos casos particulares de polinomios de grado 2. Y, además, vimos que algunos polinomios de grado 2 son irreducibles.

¿Cómo hacemos para descomponer los polinomios de grado 2 que son reducibles pero que no provienen de un trinomio cuadrado perfecto ni de una diferencia de cuadrados?

Si utilizamos el Teorema del Resto, sabemos que si un número a es raíz de $P(x)$, entonces el polinomio $x - a$ tiene que dividir a $P(x)$, es decir, que será uno de sus factores en la descomposición factorial.

En el caso de los polinomios de grado 2, vimos que la fórmula de Bhaskara nos permite encontrar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que sabemos qué términos estarán en la descomposición factorial del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Es recomendable que, antes de tratar de resolver la ecuación cuadrática por Bhaskara, comprobemos si tiene soluciones (y cuántas) por medio del discriminante.

Si $P(x) = x^2 + 5x + 6$, tenemos que $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$, y entonces, podemos hallar las dos raíces del polinomio utilizando la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

por lo que las raíces son $x_1 = \frac{-5+\sqrt{25-24}}{2} = -2$ y $x_2 = \frac{-5-\sqrt{25-24}}{2} = -3$.

Luego, sabemos que los polinomios $x + 2$ y $x + 3$ son factores del polinomio $P(x)$, por lo que

$$P(x) = (x + 2)(x + 3).$$

Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, tenemos que $\Delta = (-2)^2 - 4.3.1 = -8 < 0$, por lo que la ecuación no tiene raíces reales y el polinomio es irreducible.

Este método nos permite hallar polinomios mónicos irreducibles que son factores en la descomposición factorial del polinomio, pero no nos da el coeficiente principal. Al escribir la descomposición factorial no debemos olvidarnos de escribir ese coeficiente.

Si $Q(x) = 2x^2 + 10x + 12$, cuando aplicamos la fórmula de Bhaskara vamos a encontrar las mismas raíces que con $P(x) = x^2 + 5x + 6$. Esto es porque $(x + 2)$ y $(x + 3)$ son también factores del polinomio $Q(x)$. Sin embargo, la descomposición factorial de $Q(x)$ es

$$Q(x) = 2(x + 2)(x + 3)$$

Si tenemos el polinomio $P(x) = 2x^2 - 20x + 50$, calculamos el discriminante $\Delta = (-20)^2 - 4.2.50 = 400 - 400 = 0$ y, entonces, sabemos que $P(x)$ tiene una única raíz que podemos hallar si igualamos el polinomio a cero y utilizamos la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4.2.50}}{2.2}$$

por lo que la única raíz es $x_1 = x_2 = 5$.

Recordemos, además, que el coeficiente principal es 2, y que debemos agregarlo en la factorización.

Luego, podemos escribir a $P(x)$ como:

$$P(x) = 2.(x-5).(x-5) \text{ o directamente}$$

$$P(x) = 2.(x-5)^2.$$

Una forma de comprobar que la factorización es correcta es desarrollar el cuadrado del binomio, multiplicar y ver si se llega al polinomio original.

Actividades

60. Hallar la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^2 + 2x - 35$

b) $Q(x) = 4x^2 + 4x + 4$

c) $R(x) = -x^2 - 7x - 12$

d) $S(x) = -2x^2 + 18x + 20$

Factorización conociendo una raíz

Del mismo modo que en el caso anterior pudimos descomponer polinomios de grado 2 conociendo sus raíces, si tenemos un polinomio $P(x)$ del cual conocemos una raíz a, sabemos que el polinomio $x - a$ tiene que dividir a $P(x)$, es decir, que será uno de sus factores en la factorización.

Por ejemplo, si $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y sabemos que 3 es raíz del polinomio, podemos utilizar la Regla de Ruffini o la división tradicional, y obtenemos

$$P(x) = (x-3)(x^2 - x - 2)$$

Si ahora factorizamos el polinomio $x^2 - x - 2$ hallando las raíces con la fórmula de Bhaskara, obtenemos la siguiente descomposición del polinomio

$$P(x) = (x-3)(x+1)(x-2).$$

Del mismo modo que para los polinomios de grado 2, debemos considerar el coeficiente principal al factorizar polinomios que no sean mónicos.

Actividades

61. Hallar la descomposición factorial de los siguientes polinomios sabiendo que $x = -2$ es raíz de todos ellos:
    a) $P(x) = x^3 + 7\,x^2 + 14x + 8$
    b) $Q(x)\ = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
    c) $R(x) = -2x^3 - 8x^2 - 10x - 4$
    d) $S(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$

Ya hemos visto los diferentes casos de factorización por separado pero, en general, podemos combinarlos para hallar la descomposición factorial de un polinomio.

Sabiendo que el polinomio $P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 30\,x^3 - 18x^2 + 27x$ es divisible por $x^2 + 1$, hallar su descomposición factorial.

Como sabemos que $x^2 + 1$ divide al polinomio $P(x)$, podemos hacer la división para obtener

$$P(x) = (3x^3 - 18x^2 + 27x)(x^2 + 1).$$

En el primer factor podemos observar que se puede extraer $3x$ como factor común, y así obtenemos $P(x) = 3x(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 1)$.
Pero ahora podemos reconocer que $x^2 - 6x + 9$ es el desarrollo de $(x - 3)^2$.
Luego tenemos la siguiente factorización del polinomio

$$P(x) = 3x(x - 3)^2(x^2 + 1),$$

que nos da la descomposición factorial de $P(x)$.

Si no reconocemos que $x^2 - 6x + 9$ es el desarrollo de $(x - 3)^2$, lo podemos factorizar igualando a cero y utilizando la fórmula de Bhaskara.

Actividades

62. Hallar la descomposición factorial de los siguientes polinomios:
    a) $P(x) = -7x^3 + 14\,x^2 - 7x$
    b) $Q(x)\ = 2x^5 - 18x^3$
    c) $R(x) = -x^2 - 3x - 2$
    d) $S(x) = 3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 6,$ donde -2 es raíz de $S(x)$.
    e) $T(x) = 4x^3 + 28x^2 + 60x + 36,$ donde -1 es raíz de $T(x)$.

Multiplicidad de una raíz

Observemos que en el ejemplo anterior, la factorización del polinomio

$$P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 30\,x^3 - 18x^2 + 27x$$

resulta ser $P(x) = 3x(x-3)^2(x^2+1)$.

En este caso, se puede observar que la raíz $x = 3$ aparece dos veces, por lo que diremos que 3 es una **raíz doble** del polinomio $P(x)$. Además, el factor $x^2 + 1$ es de grado 2, pero no tiene raíces.

Esto motiva la siguiente definición: Un número a se dice una **raíz de multiplicidad k** de un polinomio $P(x)$ si existe un polinomio $S(x)$ tal que $P(x) = (x-a)^k . S(x)$ y a no es raíz de $S(x)$.

> El polinomio $P(x) = x^2(x-1).(x+3)^4$ tiene al 0 como raíz de multiplicidad 2 (o raíz doble), al 1 como raíz de multiplicidad 1 (o raíz simple) y al -3 como raíz de multiplicidad 4 (raíz cuádruple).

Actividades

63. Hallar la multiplicidad de cada una de las raíces de los siguientes polinomios utilizando las factorizaciones obtenidas en el ejercicio anterior.
    a) $P(x) = -7x^3 + 14\,x^2 - 7x$
    b) $Q(x) = 2x^5 - 18x^3$
    c) $R(x) = -x^2 - 3x - 2$
    d) $S(x) = 3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 9x + 6$
    e) $T(x) = 4x^3 + 28x^2 + 60x + 36$

Aplicación: construcción de polinomios

Utilizando la descomposición factorial, es posible hallar polinomios que cumplan determinadas condiciones.

Hallar un polinomio de grado 4, mónico, que tenga a -3 y 7 como únicas raíces. ¿Es único?

En ese caso, sabemos que los factores $(x+3)$ y $(x-7)$ deben estar en la descomposición factorial del polinomio y que 1 es el coeficiente principal. Además, como no queremos que el polinomio tenga otras raíces, no puede aparecer otro factor de la forma $(x-a)$, con a distinto de -3 y 7. Entonces, podríamos proponer el siguiente polinomio:

$$P_1(x) = (x+3)(x-7)(x^2+5),$$

Como el factor $x^2 + 5$ es irreducible y no tiene raíces reales, hemos hallado el polinomio que cumple todas las condiciones pedidas.

Sin embargo, esa no es la única posibilidad, podríamos haber propuesto también el siguiente polinomio

$$P_2(x) = (x+3)^2(x-7)^2,$$

entre otras opciones.

Hallar un polinomio $P(x)$ de grado 4, con coeficiente principal 2, tal que $x^2 + 1$ es uno de sus factores, -2 es una raíz, y tal que $P(0) = -4$. ¿Es único?

Sabemos que el polinomio debe ser de la forma

$$P(x) = 2(x^2+1)(x+2)Q(x),$$

Pero el polinomio $Q(x)$ debe ser mónico y de grado 1, dado que el polinomio $P(x)$ es de grado 4, y el coeficiente principal debe ser 2. Entonces, $Q(x) = x - a$, para algún valor real de a.

Pero si evaluamos $P(0)$, tenemos:

$$P(0) = 2(0^2+1)(0+2)(0-a) = 2.2.(-a) = -4a$$

Y queremos que se cumpla $P(0) = -4$, por lo que debemos tener que $-4a = -4$, es decir, que $a = 1$.

Por lo tanto, el polinomio $P(x)$ debe ser

$$P(x) = 2(x^2+1)(x+2)(x-1).$$

Observemos que, en este caso, hay un único polinomio que cumple con todas las condiciones pedidas.

Actividades

64. Hallar un polinomio mónico $P(x)$ de grado 2 tal que $P(2) = 0$ y $P(0) = 4$. ¿Es único?
65. Hallar un polinomio $Q(x)$ de grado 4, tal que 1 y -1 sean raíces de $Q(x)$ y $x^2 + 3$ sea un factor del polinomio. ¿Es único?
66. Hallar un polinomio $R(x)$ de grado 2, con coeficiente principal -1, tal que -2 sea raíz de $R(x)$, y $R(1) = -6$. ¿Es único?
67. Hallar un polinomio $S(x)$ que tenga grado 5, sea divisible por $(x^2 + 1)$ y $(x - 3)$, además cumpla que $S(-1) = S(2) = 0$ y al dividirlo por $(x + 2)$ de resto 100.
68. Hallar un polinomio $T(x)$ que tenga grado 3, sea divisible por $(x^2 - 4)$, sea mónico, y satisfaga que $T(0) = 8$.
69. Hallar un polinomio $V(x)$ de grado 4, mónico, que tenga como raíz a -1, sea divisible por $(x^2 + x - 2)$ y al dividirlo por x de resto 4.

Ecuaciones polinómicas

Una ecuación polinómica es una igualdad en la que ambos miembros son polinomios. Ya hemos estudiado las ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas que son casos particulares de las ecuaciones polinómicas.

Una forma de resolver una ecuación polinómica de grado mayor que 2 es lograr, despejando, que uno de los miembros sea 0. Una vez hecho esto, el problema se reduce a buscar las raíces de un polinomio.

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación polinómica:

$$(x-2)(x^2-2x)=3(x-2)$$

Lo primero que haremos es sumar el opuesto de $3(x-2)$ en ambos miembros. Tenemos, entonces, que

$$(x-2)(x^2-2x)-3(x-2)=0$$

Podemos notar que $(x-2)$ está en ambos términos, por lo que podemos sacarlo como factor común, obteniendo la ecuación:

$$(x-2)[(x^2-2x)-3]=0.$$

Tenemos, entonces, el producto de dos polinomios igualado a cero, por lo que es sencillo calcular las raíces de cada uno de ellos.

Para $x^2-2x-3=0$, podemos utilizar Bhaskara para obtener las raíces $x_1=3$ y $x_2=-1$

Y en el caso de $x-2=0$, tenemos que $x_3=2$ es solución.

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S=\{3,-1,2\}$$

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación polinómica:

$$2x^3+6x^2-20x=6x^2+18x-60$$

Observemos que, si en el primer miembro de la ecuación sacamos factor común $2x$ y en el segundo, factor común 6, nos queda:

$$2x(x^2+3x-10)=6(x^2+3x-10)$$

Ahora despejaremos para conseguir 0 en uno de los miembros, teniendo entonces

$$2x(x^2+3x-10)-6(x^2+3x-10)=0$$

Sacando $(x^2+3x-10)$ como factor común, tenemos

$$(x^2+3x-10)(2x-6)=0$$

Ahora factorizamos el polinomio $x^2+3x-10$ buscando las raíces con Bhaskara:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.(-10)}}{2.1}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}$$

Por lo que las dos raíces son $x_1=\frac{-3+7}{2}=2$ y $x_2=\frac{-3-7}{2}=-5$.

Podemos, entonces, factorizar el polinomio $x^2+3x-10$ *como* $(x-2)(x+5)$ *y tenemos que la ecuación original resulta*

$$(x-2)(x+5)2(x-3)=0$$

De lo que podemos deducir que las soluciones de la ecuación son $2,-5$ *y* 3*. Es decir,*

$$S=\{2,-5,3\}$$

Muchas veces tenemos en ambos lados de la igualdad el mismo factor y podríamos pensar en simplificarlos, pero debemos tener cuidado, ya que podemos perder soluciones de la ecuación.

Si tenemos la ecuación polinómica

$$2x(x-2)(x+5)=6(x-2)(x+5)$$

Y simplificáramos los términos que son iguales en ambos miembros (o dividimos por ese factor), tendríamos:

$$2x\cancel{(x-2)(x+5)}=6\cancel{(x-2)(x+5)}$$

$$2x=6$$

Que al resolver (como en el ejercicio anterior) nos daría la solución:

$$S=\{3\}.$$

Notemos que en este caso no obtuvimos $x=-5$ ni $x=2$ como soluciones, dado que las perdimos al simplificar.

Actividades

70. Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:
    a) $-x^3+x^2=(x-1)(x^4-3x^3+x^2)$
    b) $8x=x^5-2x^3$
    c) $x^5-6x^2=7x^3$
    d) $2(x-1)(2x^2-3)=-10x(x-1)$
    e) $x^4-6x^2+15=3x^2-5$

Fracciones algebraicas

La división de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, donde $Q(x) \neq 0$, se puede representar como una fracción, que llamaremos **expresión algebraica racional**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Debido a la similitud que existe entre estas expresiones y las fracciones numéricas, diremos que las expresiones algebraicas racionales son **fracciones algebraicas**.

Por ejemplo, si $P(x) = x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, tenemos la siguiente fracción algebraica

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

Pero esta expresión es válida siempre que el denominador no valga 0. Es decir, los valores tales que $Q(x) = 0$ son valores donde no está definida la fracción algebraica.

Al conjunto de valores en los que se puede evaluar una fracción algebraica se lo llama **conjunto de validez** y, normalmente, se abrevia C.V. Este conjunto está formado por todos los números reales, excepto aquellos números que no se pueden evaluar porque provocan una operación no definida (ya que anulan alguno de los denominadores de la fracción o un numerador que al operar produzca una división por cero).

En este caso, $x^2 - 4x + 3$ se anula si $x = 1$ y si $x = 3$, por lo tanto, el conjunto de validez será:

$$C.V. = \mathbb{R} - \{1,3\}.$$

Una herramienta útil para hallar el conjunto de validez es tener la descomposición factorial del polinomio que está en el denominador.

Por otro lado, podemos factorizar el numerador y denominador de la fracción algebraica para obtener otra expresión de la misma

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

Como hay un factor que se repite en el numerador y el denominador, podemos simplificar esta expresión para hallar una **fracción algebraica equivalente**

$$\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

Estas expresiones serán equivalentes para todo valor de x que esté en el conjunto de validez de la fracción algebraica original. En el caso en que no se puedan realizar más simplificaciones, diremos que está en su forma **irreducible**.

El conjunto de validez siempre debe ser hallado antes de realizar simplificaciones en la fracción algebraica.

Actividades

71. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fracciones algebraicas. Justificar las afirmaciones.

a) $\frac{x^3-2}{4x}$ b) $\frac{\sqrt{-4}.x}{x^2-2}$ c) $\frac{\sqrt{x+4}}{x-6}$ d) $\frac{x^3.x+x(x^4-1)}{x^2-4x}$

72. Hallar el conjunto de validez de las siguientes fracciones algebraicas. En los casos en que sea posible, hallar la fracción algebraica equivalente irreducible:

a) $\frac{-7x^3+14\,x^2-7x}{x^3-4x}$

b) $\frac{-3x^4+3}{x^2-x-2}$

c) $\frac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2}$

d) $\frac{x^4+3x^2+2}{x^2-10x+25}$

73. Hallar una fracción algebraica equivalente a $\frac{x^3-x^2}{(x+2)}$ con denominador x^3-4x.

74. ¿Son equivalentes las fracciones algebraicas $\frac{x^2+5x-14}{x^2+6x+9}$ y $\frac{x^3+4x^2-19x+14}{x^3+5x^2+3x-9}$? ¿En qué conjunto?

Operaciones con fracciones algebraicas

Del mismo modo en que operamos con fracciones numéricas, podemos sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. Repasaremos estas operaciones y veremos qué debemos considerar al realizarlas.

Suma y resta de fracciones algebraicas

Para sumar o restar fracciones algebraicas necesitamos que ambas tengan un denominador en común. Esto podemos hacerlo de modo análogo a lo que hicimos con las fracciones numéricas, calculando el $m.c.m.$ de los denominadores para obtener fracciones algebraicas equivalentes que tengan el mismo denominador. Una vez que las dos fracciones algebraicas tienen el mismo denominador, la operación se realiza en los numeradores

$$\frac{P(x)}{R(x)}+\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{P(x)+Q(x)}{R(x)}$$

$$\frac{P(x)}{R(x)}-\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{P(x)-Q(x)}{R(x)}$$

Realizar la siguiente operación $\frac{x^2+5x}{x^2+6x+9}+\frac{4}{2x^2+4x-6}$

Para operar, debemos hallar el $m.c.m.$ *de los polinomios* $P(x)=x^2+6x+9$ *y* $Q(x)=2x^2+4x-6$. *Utilizando la fórmula de Bhaskara podemos factorizarlos para obtener*

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

$$2x^2+4x-6=2(x+3)(x-1)$$

Entonces, tenemos que el $m.c.m.$ *de* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *es*

$$2(x+3)^2(x-1).$$

Ahora para realizar la suma $\frac{x^2+5x}{x^2+6x+9}+\frac{4}{2x^2+4x-6}$ *escribimos las fracciones algebraicas equivalentes a cada uno de los sumandos, de modo tal que los denominadores de ambas fracciones algebraicas equivalentes resulten ser* $2(x+3)^2(x-1)$*:*

$$\frac{(x^2+5x)2(x-1)}{2(x+3)^2(x-1)}+\frac{4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}$$

Y, en este caso, podemos sumar directamente los numeradores y dejar el $m.c.m.$ *de los denominadores como denominador*

$$\frac{2(x^2+5x)(x-1)}{2(x+3)^2(x-1)}+\frac{4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}=\frac{2(x^2+5x)(x-1)+4(x+3)}{2(x+3)^2(x-1)}$$

$$=\frac{2x^3+8x^2-6x+12}{2(x+3)^2(x-1)}$$

El conjunto de validez de esta suma de fracciones algebraicas es

$$C.V.=\mathbb{R}-\{1,-3\}.$$

Actividades

75. Hallar el $m.c.m.$ de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en los siguientes casos:
   a) $P(x)=(x+2)(x-3)^4$ y $Q(x)=(x+2)^3(x-3)^2x$.
   b) $P(x)=2x^2-8x+8$ y $Q(x)=-x^2+4$.
   c) $P(x)=x^3$ y $Q(x)=x^5-7x^4$.
76. Realizar las siguientes operaciones y escribir el conjunto de validez:
   a) $\frac{x^3-7x^2}{x^2-3x-28}+\frac{x}{x^2-16}$
   b) $\frac{x+7}{x^2-7x+12}-\frac{3x+12}{x^2-16}$
   c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}+\frac{3}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2+2x+1}$
   d) $\frac{4x+2}{2x^2-7x-4}-\frac{6}{3x-12}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica que tiene como numerador el producto de sus numeradores y, como denominador, el producto de sus denominadores. En símbolos, tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

donde el conjunto de validez estará dado por todos los números reales que no anulen el denominador $Q(x).S(x)$. Una vez que hallamos el conjunto de validez, podríamos simplificar para hallar alguna fracción algebraica equivalente.

Realizar la siguiente operación

$$\frac{x^2-x-6}{x}.\frac{5x-1}{2x-6}$$

Tenemos que

$$\frac{x^2-x-6}{x}.\frac{5x-1}{2x-6}=\frac{(x^2-x-6)(5x-1)}{x(2x-6)}$$

donde el conjunto de validez es $C.V.=\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Ahora, podemos factorizar los polinomios que componen la fracción algebraica para hallar otra equivalente

$$\frac{(x^2-x-6)(5x-1)}{x(2x-6)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{2x\cancel{(x-3)}}=\frac{(x+2)5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{2x}$$

En este caso, se puede observar que si hubiéramos buscado el conjunto de validez una vez que la fracción algebraica estaba simplificada, este hubiera sido erróneo, ya que el 3 no debe estar en el conjunto.

Actividades

77.Realizar las siguientes operaciones y escribir el conjunto de validez:

a) $\frac{x^2-3x-28}{x^3-7x^2}.\frac{x}{x^2-16}$

b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}.\frac{x-3}{x^2-4x+3}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1}.\frac{x^2-1}{x}.\frac{2x}{x^2+2x+1}$

d) $\frac{x^2+8x+16}{3x^2-48}.\frac{5x+20}{3x^2-24x+48}$

Fracción algebraica inversa

Si tenemos una fracción algebraica de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios distintos de 0, se define la fracción algebraica inversa como

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)^{-1} = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

En este caso para resolverla, primero, debemos calcular del conjunto de validez todos los valores que anulan, tanto a $P(x)$ como a $Q(x)$.

Calcular $\left(\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-1}\right)^{-1}$

Tenemos que

$$\left(\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 1}\right)^{-1} = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Como las factorizaciones del numerador y denominador son

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2$$

y tienen como raíces los números $1, -1, 0$ *y* 2, *entonces el conjunto de validez es*

$$C.V. = \mathbb{R} - \{1, -1, 0, 2\}.$$

Actividades

78. Hallar la fracción inversa en los siguientes casos e indicar el conjunto de validez:

a) $\frac{x}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2+12x+36}{x^2-4x-5}$ c) $\frac{3}{x^3+3x^2+3x+1}$

División de fracciones algebraicas

Para dividir dos fracciones algebraicas, multiplicamos la primera fracción algebraica por la inversa de la segunda. En símbolos, tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} . \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x).S(x)}{Q(x).R(x)}$$

Para hallar el conjunto de validez, no solamente debemos considerar los números que anulan los denominadores $Q(x)$ y $S(x)$, sino también los que anulan al numerador $R(x)$, ya que al invertir la segunda fracción algebraica ese numerador pasará a ser un denominador.

Realizar la siguiente operación

$$\frac{x^2+3x-4}{x+5} : \frac{x}{x+2}$$

Sabemos que el conjunto de validez será

$$C.V. = \mathbb{R} - \{-5, 0, -2\},$$

y para efectuar la división debemos invertir la segunda fracción algebraica y luego multiplicar, por lo que queda

$$\frac{x^2+3x-4}{x+5} : \frac{x}{x+2} = \frac{x^2+3x-4}{x+5} . \frac{x+2}{x} = \frac{(x^2+3x-4)(x+2)}{(x+5)x}$$

Actividades

79. Realizar las siguientes operaciones y escribir el conjunto de validez

a) $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+4x} : \frac{3}{4x}$

b) $\frac{x^2-4}{2x^2+8x+8} : \frac{x^3+x^2}{2x+2}$

c) $\frac{x^2-4x-5}{x^3+3x^2+3x+1} : \frac{x}{x^2-1}$

80. Realizar las siguientes operaciones e indicar el conjunto de validez (C.V.):

a) $\frac{x^2+3x}{x^2-2x} + \frac{2x^2-8x+8}{x^2+x-6} : \frac{x^2-2x}{5x^2+15x}$

b) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-49} \cdot \frac{3x^2-3x}{x^2+x-2} - \frac{2x+10}{x^2+6x-7}$

c) $\frac{12x-12}{x^2+2x} \cdot \left[\frac{x^3+2x^2+x}{3x^2-3} + \frac{x^2+x-6}{6x^2+12x-18}\right]$

Ecuaciones fraccionarias

Una **ecuación fraccionaria** es una ecuación donde los términos son fracciones algebraicas. Por ejemplo, la ecuación $\frac{x^2-x}{x^2-1} = 0$ es una ecuación fraccionaria.

El conjunto de validez de la ecuación anterior es

$$C.V. = \mathbb{R} - \{1, -1\}.$$

Nuestro objetivo será resolver la ecuación. Para esto, debemos buscar valores que sean solución de $x^2 - x = 0$, es decir, en los cuales el numerador de la ecuación tome el valor 0. Si factorizamos el numerador, es sencillo hallar esos valores, ya que $x^2 - x = x(x-1) = 0$ si $x = 0$ o $x = 1$. Sin embargo, $x = 1$ no puede ser solución de la ecuación, porque $1 \notin C.V.$

Por lo tanto, el conjunto solución será

$$S = \{0\}.$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \leftrightarrow P(x) = 0$$

En algunos casos, tendremos que realizar algunas operaciones para poder hallar la solución.

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación fraccionaria

$$\frac{-x-6}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=0$$

Sabemos que el conjunto de validez es

$$C.V.=\mathbb{R}-\{2,-2\},$$

pero, para hallar el conjunto solución, debemos, primero, realizar la suma de las fracciones

$$\frac{-x-6}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{-x-6+x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-x-6+x^2+2x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+x-6}{(x-2)(x+2)}=0$$

Y ahora sí alcanza con igualar el numerador a 0 *para obtener las soluciones*

$$x^2+x-6=(x-3)(x+2)=0$$

Pero como $-2\notin C.V.$*, tenemos que el conjunto solución es*

$$S=\{3\}.$$

Veamos un ejemplo más.

Resolver la siguiente ecuación fraccionaria

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}:\frac{2x+6}{2x}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Si factorizamos, obtenemos la ecuación

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}:\frac{2(x+3)}{2x}+\frac{1}{x+1}=0,$$

lo cual nos permite hallar el conjunto de validez

$$C.V.=\mathbb{R}-\{3,-3,0,-1\}.$$

Ahora, podemos simplificar

$$\frac{\cancel{(x-3)(x+3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}}:\frac{\cancel{2(x+3)}}{\cancel{2}x}+\frac{1}{x+1}=0,$$

para obtener la ecuación

$$\frac{1}{x-3}:\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Si separamos en términos, sabemos que debemos realizar primero la división

$$\frac{1}{x-3}.x+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x-3}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Ahora realizamos la suma, usando que el $m.c.m.$ *de los denominadores es el polinomio* $(x-3)(x+1)$ *y obtenemos el resultado*

$$\frac{(x+1).x+(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x^2+x+(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x^2+2x-3}{(x-3)(x+1)}=0.$$

Para resolver esta última ecuación debemos hallar los valores que sean raíces del polinomio x^2+2x-3. *Utilizando la fórmula de Bhaskara, podemos hallar los valores* $x=1$ *y* $x=-3$. *Pero como* $-3 \notin C.V$, *tenemos que el conjunto solución es*

$$S=\{1\}.$$

Actividades

81. Hallar el conjunto de validez y el conjunto solución de las siguientes ecuaciones fraccionarias

a) $\frac{x^2}{2x^2+5x-3}+\frac{x^2-\frac{1}{4}}{4x^2-4x+1}:\frac{2x^2+x}{4x^2}=0$

b) $\frac{x^2-\frac{1}{9}}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}:\frac{3x^2+x}{6x^2}+\frac{2x^2}{3x-1}=0$

c) $-\frac{8}{x^2+5x}+\frac{3x^2+6x}{x^4+4x^3+4x^2}:\frac{x+5}{x^2+3x+2}+\frac{x+1}{x+5}=0$

d) $\frac{2x-1}{2x^2+x-1}+\frac{6}{x^2-1}=\frac{2}{x^2+x}$

e) $\frac{3x^2-15x+18}{x^2+x-6}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{30-10x}{x^2-9}$

f) $\frac{1}{x+1}+\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}:\frac{3x+9}{3x}=0$

Actividades de repaso del Capítulo 2

1. Encontrar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones
   a) $x^5 + 4x^3 = x^3 + 4x$
   b) $2x^3 = 2x^5 - 5x^4 - x^3$
   c) $(x+3)(x^3 - 3x^2 - 3x) = x^2 + 3x$
2. Encontrar el o los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para que la ecuación
$$x^2 + 2(\beta + 3)x + 6(\beta + 2) + 1 = 0$$
   tenga una única solución real.
3. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 + (2a-4)x$ es divisible por $x + 1$.
   a) Determinar el valor de a y escribe el polinomio.
   b) Encontrar todas sus raíces reales.
   c) Escribir su descomposición factorial en $\mathbb{R}[x]$.
4. Dado $P(x) = 2Kx^{121} + 9Kx^{99} - (K-1)x^{70} + 9x^{48} + 5Kx^{34} + 4$, determinar el valor de K, de modo que $P(x)$ sea divisible por $x + 1$.
5. Si se sabe que al dividir $P(x) = x^2 + 2x - 1$ por $x - c$ da como resto 2, ¿cuáles son los posibles valores de c? Justificar.
6. Construir un polinomio $P(x)$ de grado 4 que tenga como raíces a $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$, que sea divisible por $C(x) = 3x + 1$ y que al dividirlo por $D(x) = x$ de como resto -28. Escribir su descomposición factorial.
7.
   a) Escribir un polinomio $P(x)$ de grado 3, que tenga a $1/3$ y a -4 como raíces y admita al polinomio $x - 4$ como divisor. ¿Es único?
   b) ¿Cuál de los polinomios que satisfacen las condiciones dadas en a) verifica además que al dividirlo por x el resto es 2?
8. La diferencia entre los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es igual a 64. ¿Cuáles son esos números?
9. Expresar el área de un triángulo equilátero en términos de su altura.
10. Determinar un número entero tal que su producto con el opuesto de su consecutivo es igual al doble de su cuadrado.
11. Determinar un número natural tal que el producto de él con su anterior sea igual a su doble, más 4.
12. Si tenemos 2 litros de jugo con 20% de pulpa y lo mezclamos con un litro de jugo con 60% de pulpa, ¿Cuál será el porcentaje de pulpa de la mezcla resultante?

Consejos a tener en cuenta para realizar ejercicios

Al terminar el primer módulo y antes de rendir el primer parcial, es bueno que consideres las siguientes sugerencias para resolver ejercicios:

- ✓ No aproximar: Si el enunciado no lo pide, no aproximes. Deja el valor exacto, por más que esté expresado como una raíz. Otro ejemplo es: π vale π y no $3{,}14$ o $3{,}1415$.
- ✓ Definir variables: Siempre que utilices una letra para representar alguna variable desconocida, hay que definirla bien. Ejemplo: P= Pedro, no nos da información de si estamos averiguando su edad, su peso, su altura, su DNI, etc… Define por ejemplo P= Edad actual de Pedro, o F= cantidad de figuritas que tiene Juan.
- ✓ Dar respuesta: Siempre que en el enunciado haya una pregunta, asegúrate de dar una respuesta. Por ejemplo: el valor de k buscado es 3, la edad de la madre es 45 años, el perímetro mide $35\ cm$, etc. También debes tener en cuenta si la respuesta debe llevar unidades de medida.
- ✓ Esquematizar la situación: Si el problema es geométrico, siempre te conviene acompañar los cálculos con un gráfico (no importa si es exacto, lo importante es que te dé idea de lo que tienes que plantear), en el que figuren los datos que te dan, y los datos que tienes que averiguar, o sea, las incógnitas.
- ✓ Justificar: Al realizar cálculos, muchas veces utilizas propiedades o teoremas que debes nombrar para justificar los pasos realizados. Por ejemplo, por el Teorema del Resto tenemos que…o por el Algoritmo de la división sabemos que… etc.
- ✓ Definir los conjuntos: En el caso de usar números pares (por ejemplo), es necesario que aclares que $c \in \mathbb{Z}$ si utilizas que $n = 2.c$, si no, no estarías definiendo el conjunto correctamente.
- ✓ Verdaderos y Falsos: Cuando se pide que decidas por V o F sobre una afirmación y justifiques tu elección, deberás utilizar contraejemplos para demostrar que algo es falso, pero no alcanza un ejemplo para demostrar que algo es verdadero. Se pueden hacer algunos ejemplos para decidir si alguna afirmación es verdadera o no, pero en caso de ser verdadera, es necesario probar de forma analítica utilizando, por ejemplo, las propiedades.

CAPÍTULO 3

Rectas, cónicas y sistemas de ecuaciones

Foto: Mapa obtenido con *Google Maps*

Si un alumno que llega a la ciudad de La Plata, desciende del micro en la Plaza Italia y debe caminar hasta la Facultad de Ingeniería, y un compañero le quiere explicar cómo llegar desde un punto a otro de la ciudad, seguramente va a estar utilizando conceptos como: distancia, sentido de orientación, camino recorrido, desplazamiento, le dirá, seguramente, que la plaza es el punto inicial de su recorrido, etc. Esta ubicación espacial en un plano es muy útil y para ello estudiaremos cómo ubicar puntos de referencia en un plano coordenado, el origen de coordenadas, ejes cartesianos y otros elementos geométricos que serán de utilidad para ubicar puntos de referencia en esta u otras situaciones.

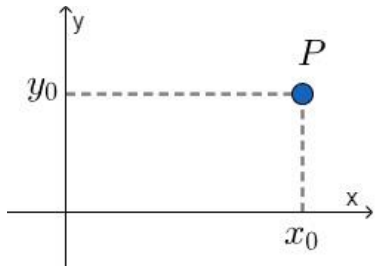
Plano coordenado: $\mathbb{R}^2$

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) recibe el nombre de **plano coordenado**, y lo denotamos $\mathbb{R}^2$. A la coordenada x del par ordenado se la conoce como **abscisa** y a la coordenada y como **ordenada.**

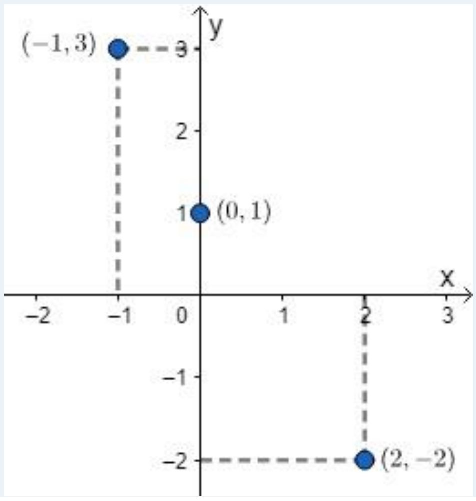
A cada par ordenado (x, y) de este conjunto le corresponde un punto del plano, como veremos a continuación.

La notación $\mathbb{R}^2$ es una forma reducida de expresar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es decir, cuando expresamos que el par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lo que estamos diciendo es que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Puede identificarse $\mathbb{R}^2$ con el conjunto de todos los puntos del plano. Para ello, se trazan dos rectas: una horizontal, llamada **eje $\boldsymbol{x}$** y una vertical, llamada **eje $\boldsymbol{y}$**. El punto de intersección de los ejes recibe el nombre de **origen** u **origen de coordenadas** y se denota por O. Se establece una unidad de medida, que puede o no ser la misma para ambos ejes. El sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen, y el sentido positivo del eje y es hacia arriba del origen. De este modo, si queremos ubicar el punto $P(x_0, y_0)$ obtenemos

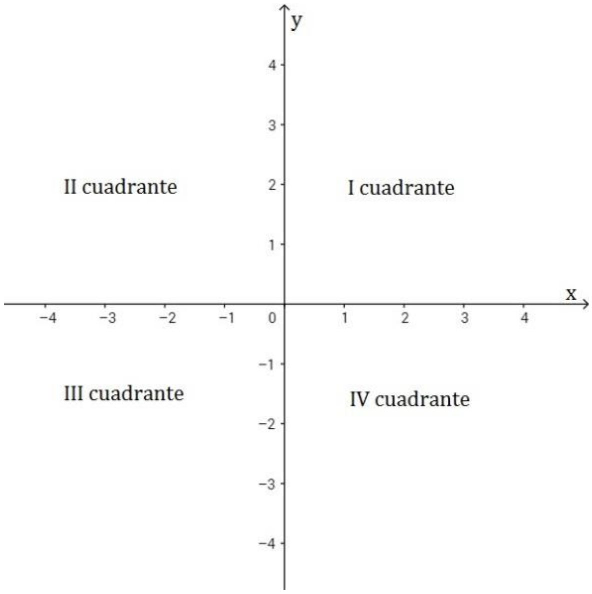


Si tenemos que graficar los puntos $(-1,3)$, $(2,-2)$ y $(0,1)$ tenemos:



Existen varias notaciones de un punto del plano coordenado. Podemos escribir solo el par (x, y), o, si lo nombramos P, se puede notar como $P = (x, y)$ o, directamente, $P(x, y)$. En este material utilizaremos la notación (x, y) o $P(x, y)$, como se utiliza en Matemática A.

A los ejes x e y se los llama **ejes coordenados o cartesianos**[1]**.** Estos dividen al plano en cuatro partes denominadas **cuadrantes**. El primer cuadrante es aquel en que la abscisa y la ordenada son ambas positivas, esto es el cuadrante superior derecho, y luego se numeran siguiendo el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj: primer cuadrante, segundo cuadrante, tercer cuadrante y, por último, cuarto cuadrante.



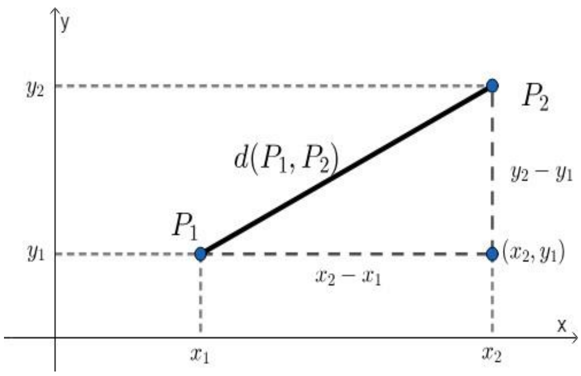
Observar que solo se coloca una flecha indicando el sentido de crecimiento de los valores que están sobre el eje, por ese motivo, cada eje tiene una sola flecha.

Distancia entre puntos

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, podemos calcular la **distancia** entre ellos utilizando la fórmula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esto se puede deducir si ubicamos los puntos en el plano coordenado y aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo que queda conformado por los puntos P_1, P_2 y el punto (x_2, y_1), como se ve en el siguiente gráfico

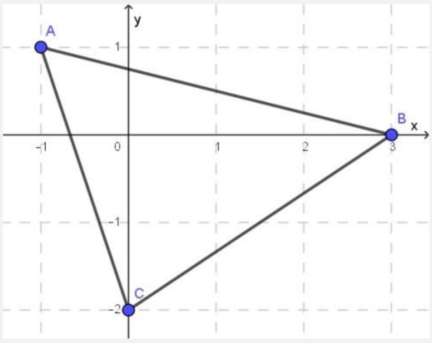


[1] La palabra cartesianos se usa en honor al matemático y filósofo René Descartes (1596-1650), que fue uno de los primeros en emplear este sistema de coordenadas.

La distancia entre los puntos $P_1(2,-1)$ y $P_2(-3,0)$ es

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(-3-2)^2+\left(0-(-1)\right)^2}=\sqrt{26}$$

Calcular el perímetro del triángulo determinado por los puntos A, B y C como se muestra en la figura



En primer lugar, podemos identificar las coordenadas de los puntos a partir de la gráfica: A es el punto con coordenadas $(-1,1)$, B es el punto $(3,0)$ y C es $(0,-2)$.

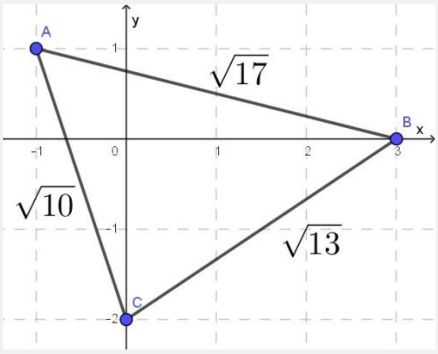
Como el perímetro es la suma de las longitudes de los lados del triángulo, debemos calcular las distancias entre los puntos:

$$d(A,B)=\sqrt{\left(3-(-1)\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$$

$$d(A,C)=\sqrt{\left(0-(-1)\right)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$d(B,C)=\sqrt{(0-3)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{13}$$

Tenemos, entonces, las longitudes de los lados del triángulo, que resultan ser



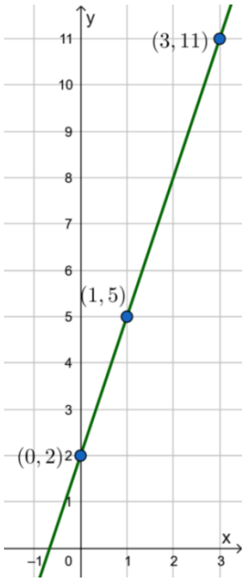
Por lo tanto, el perímetro del triángulo es: $\sqrt{17}+\sqrt{10}+\sqrt{13}$.

Actividades

1. Hallar la distancia entre los puntos $P(2,9)$ y $Q(-1,4)$. Graficar los puntos.
2. Hallar el perímetro del paralelogramo determinado por los puntos $A(0,4)$, $B(5,4)$, $C(3,1)$ y $D(-2,1)$.

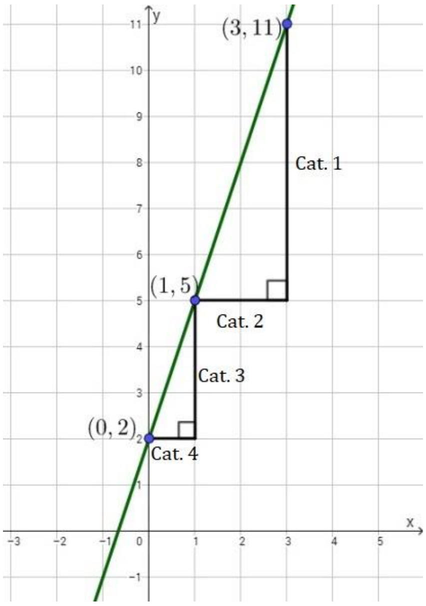
Recta en el plano

Supongamos que tenemos una recta representada como en el siguiente gráfico:



Queremos hallar la ecuación lineal que tiene a esta recta como gráfica.

Si bien sabemos que solo dos puntos son suficientes para definir una recta, consideremos, para este ejemplo, los tres puntos dados. Observemos que los puntos $A(1{,}5)$, $B(3{,}11)$ y $C(0{,}2)$ pertenecen a la recta. Si dibujamos dos triángulos rectángulos, como se observa en la figura siguiente, podemos corroborar que son semejantes, dado que los cocientes de las longitudes de los catetos de los triángulos son iguales, es decir:



$$\frac{long(Cat.1)}{long(Cat.2)} = \frac{long(Cat.3)}{long(Cat.4)}$$

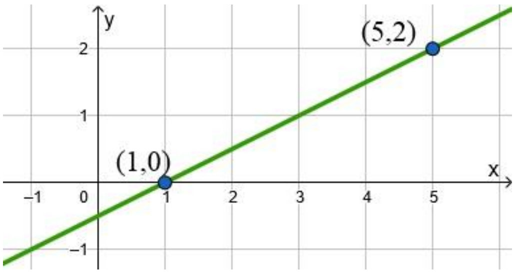
Si reemplazamos los valores correspondientes a las longitudes de los lados, tenemos:

$$\frac{11-5}{3-1} = \frac{5-2}{1-0} = 3$$

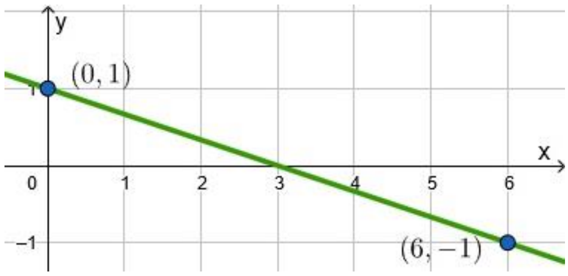
Esto ocurre independientemente de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta que elijamos. La constante que resulta del cociente se conoce como **pendiente de la recta** y se suele denotar por la letra m. En símbolos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es decir, la pendiente de la recta es una proporción o razón entre la variación de las ordenadas (en el eje y) y la variación de las abscisas (en el eje x). La pendiente de una recta puede ser positiva o negativa, como se observa en los siguientes gráficos:

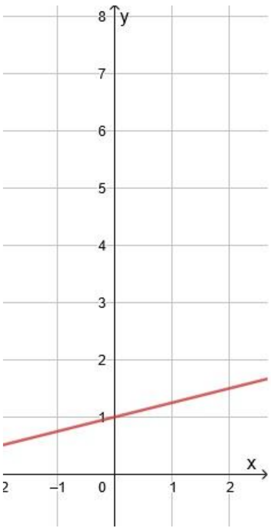
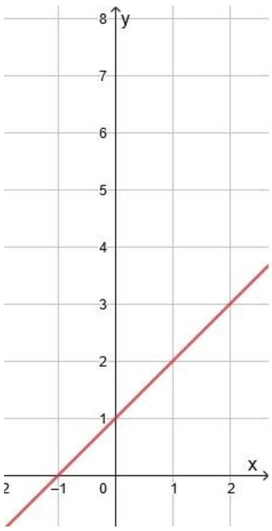
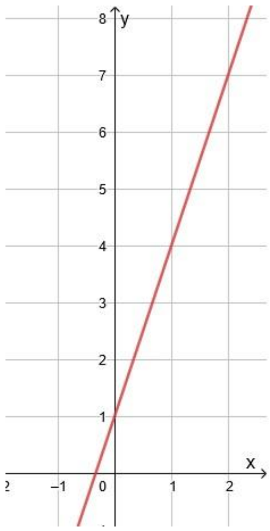
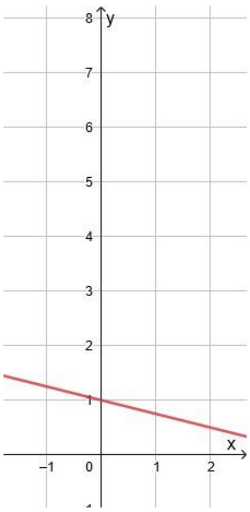
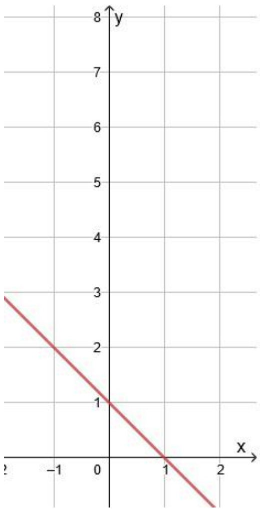
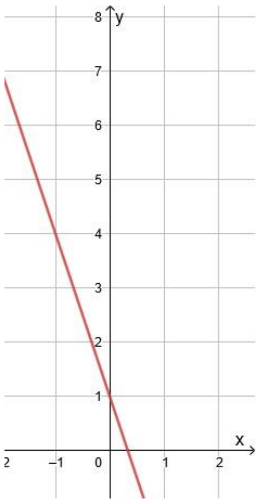


Pendiente positiva $m = \frac{1}{2}$



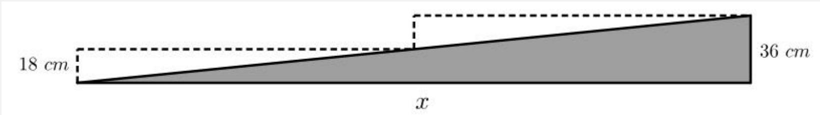
Pendiente negativa $m = -\frac{1}{3}$

Además, notemos que cuanto mayor es la pendiente en valor absoluto, mayor es la inclinación de la recta respecto del eje x. Esto lo podemos observar en los siguientes ejemplos:

Pendiente $m = \frac{1}{4}$	Pendiente $m = 1$	Pendiente $m = 3$
		
Pendiente $m = -\frac{1}{4}$	Pendiente $m = -1$	Pendiente $m = -3$
		

Veamos un ejemplo de una situación real donde se utiliza la pendiente.

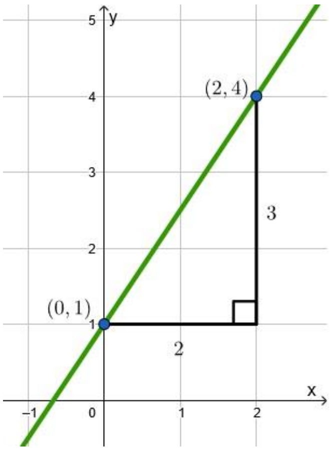
Una rampa de acceso tiene una pendiente promedio de $0{,}1$*. Es decir, por cada metro que se recorre de manera horizontal, se suben* $0{,}1$ *metros de manera vertical. Entonces, ¿cuánto debe medir horizontalmente una rampa si queremos subir dos escalones de* $18\ cm$ *cada uno?*



Como sabemos que la pendiente es la altura (en este caso queremos que sea de $36\ cm$*) sobre la distancia horizontal (*x*), tenemos que plantear*

$$0{,}1 = \frac{altura}{x} = \frac{36}{x}$$

De donde $x = 360\ cm$*, o sea,* $3{,}6$ *metros.*

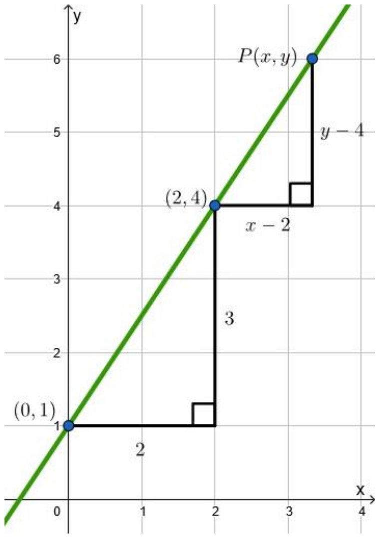


Supongamos ahora que tenemos los puntos $(0{,}1)$ y $(2{,}4)$ y queremos hallar la ecuación que verifican todos los puntos de la recta que pasa por esos puntos.

En primer lugar, podemos calcular la pendiente de la recta, que será

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Como el punto $(2{,}4)$ es uno de los puntos de la recta, si tomáramos cualquier otro punto $P(x, y)$ en la recta, se debería cumplir, tal como vimos antes, que el cociente de las longitudes de los catetos permanece constante y vale $\frac{3}{2}$.



Es decir, que se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{3}{2}$$

Si operamos en esta expresión para despejar la variable y obtenemos

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x-2)$$

que es la **ecuación punto-pendiente** de la recta.

Si operamos y despejamos y, tenemos

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

que es la ecuación explícita de la recta.

Esto quiere decir que cualquier punto (x, y) que esté sobre la recta debe satisfacer la ecuación de la recta y, recíprocamente, si un punto (x, y) satisface la ecuación, entonces el punto está sobre la recta. Por esta razón, como el punto $(0,1)$ está en la recta, este debe satisfacer la ecuación. Efectivamente, esto es así, pues cumple la ecuación de la misma:

$$1 = \frac{3}{2}.0 + 1$$

Notemos, además, que la recta cortaba al eje y en $y = 1$, y, al escribir la ecuación explícita de la recta, la constante 1 aparece sumando en la ecuación.

En general, si tenemos una recta con pendiente m y sabemos que pasa por el punto (x_0, y_0), la ecuación **punto-pendiente** de la recta es

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

Se llama ecuación **explícita** de la recta a aquella de la forma

$$y = m.x + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen, es decir, el valor en el que la recta interseca al eje y.

También la ecuación de una recta puede ser expresada de manera que no se despeje ninguna variable y la ecuación esté igualada a cero, de la forma $Ax + By + C = 0$, y se la denomina **ecuación implícita** de la recta.

Es importante notar que en la ecuación implícita de la recta no es sencillo observar la pendiente de la misma.

Hallar las ecuaciones punto-pendiente, explícita e implícita de la recta que tenga pendiente -3 y que pasa por el punto $Q(4,-6)$ y luego graficar la recta.

Ecuación punto-pendiente:

$$y - (-6) = -3(x - 4)$$

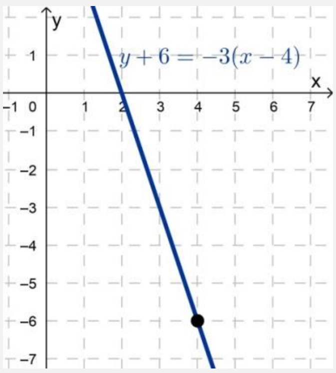
Ecuación explícita:

$$y = -3(x - 4) - 6$$

$$y = -3x + 6$$

Ecuación implícita:

$$y + 3x - 6 = 0$$



La ecuación punto-pendiente de la recta será muy utilizada en Matemática A.

Hallar las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos $(3,7)$ *y* $(1,4)$.

Comencemos hallando la pendiente de la recta. Para esto, tomaremos los puntos $(x_1, y_1) = (3,7)$ *y* $(x_2, y_2) = (1,4)$. *Tenemos, entonces, que la pendiente es*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-7}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Para hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por ambos puntos, recordamos la ecuación general: $y - y_0 = m.(x - x_0)$

La pendiente hallada es $m = \frac{3}{2}$. *Además, podemos tomar un punto cualquiera en la recta, por ejemplo el punto* $(3,7)$ *y tenemos, entonces,*

$$y - 7 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

Para hallar la ecuación explícita de la recta, utilizamos la forma: $y = m.x + b$

Si reemplazamos $m = \frac{3}{2}$ *en la ecuación, obtenemos*

$$y = \frac{3}{2}.x + b$$

Para averiguar la ordenada al origen, podemos reemplazar alguno de los puntos de la recta en la ecuación, por ejemplo, reemplacemos el punto $(1,4)$

$$4 = \frac{3}{2}.1 + b$$

Al operar, obtendremos el valor de la incógnita b

$$4 = \frac{3}{2} + b$$

$$4 - \frac{3}{2} = b$$

$$\frac{4.2 - 3}{2} = b$$

$$\frac{5}{2} = b$$

Por lo tanto, la ecuación explícita de la recta es

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Otra manera de hallar la ecuación explícita de la recta es partir de la ecuación punto-pendiente hallada en el inciso a), es decir

$$y - 7 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

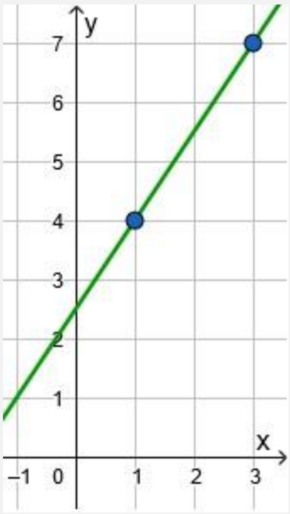
$$y = \frac{3}{2}(x - 3) + 7$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} + 7$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

que resulta ser la misma expresión hallada más arriba con m y b.

Podemos representar esta recta ubicando los dos puntos en el plano y luego graficando la recta que pasa por los mismos:



Decidir si la recta de ecuación $y = 3x - 4$ pasa por los siguientes puntos:

$$A(1, -1)$$

$$B(2,4)$$

Para verificar que la recta pasa por los puntos, lo que podemos hacer es reemplazar en la ecuación x por el valor de la abscisa y ver si obtenemos el valor de la ordenada.

Si reemplazamos x por 1, obtenemos

$$y = 3.(1) - 4 = 3 - 4 = -1$$

por lo cual, el punto $A(1, -1)$ pertenece a la recta.

Otra manera de resolver es reemplazar tanto x como y y ver si se obtiene una igualdad válida. Por ejemplo, si reemplazamos x por 2 e y por 4 obtenemos

$$4 = 3.2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

Lo cual no es verdad, ya que $4 \neq 2$ y, entonces, el punto $B(2,4)$ no pertenece a la recta.

Encontrar, de ser posible, la ecuación explícita e implícita de la recta $2x = 4 + 3y$.

Para llevarla a su expresión explícita, debemos despejar la variable y en la ecuación, por lo tanto, se tiene:

$$2x = 4 + 3y \;\rightarrow\; 2x - 4 = 3y \;\rightarrow\; \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = y$$

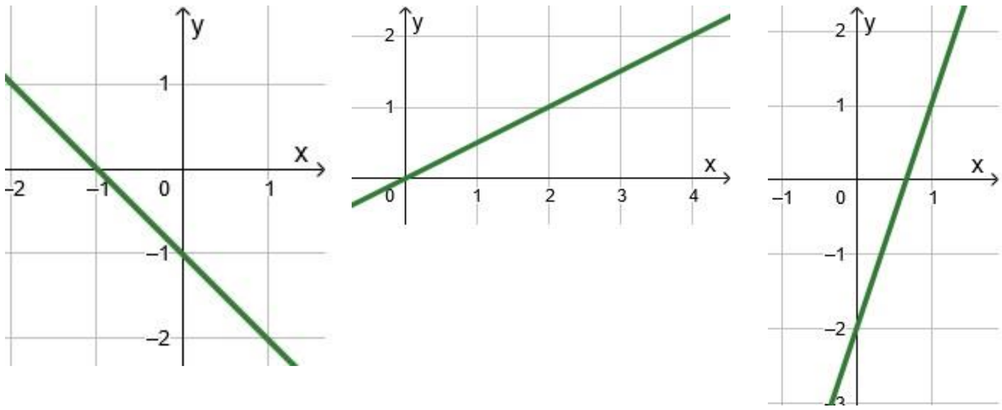
Para obtener la ecuación implícita, debemos encontrar una ecuación equivalente donde uno de sus miembros sea igual a cero. Por lo tanto, tenemos:

$$2x = 4 + 3y \quad \rightarrow \quad 2x - 3y - 4 = 0$$

Como vimos en estos ejemplos, una vez que se obtiene la expresión de una recta, se puede obtener otra de las formas de la misma recta, despejando las variables que correspondan en cada caso.

Actividades

3. Hallar la ecuación explícita, implícita y punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1,4)$ y $(2,0)$. ¿Cuál es la ordenada al origen de esta recta? Representar los puntos y la recta en el plano coordenado.
4. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(3,9)$ y $(1,-10)$.
5. Hallar la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



6. ¿Pertenece el punto $(-2,4)$ a la recta de ecuación $y = 3.x + 10$? ¿Y el punto $(0,3)$?
7. Indicar, para cada una de las siguientes ecuaciones, si las rectas correspondientes tienen pendiente positiva o negativa.

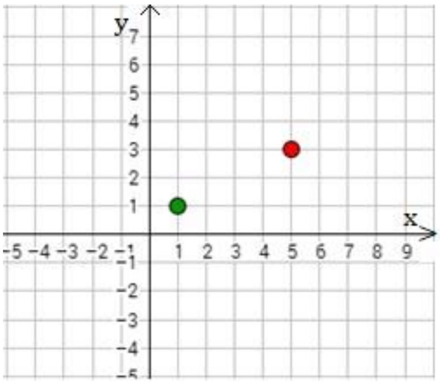
   a) $y = -4x + 2$ b) $y - 6x = 0$ c) $y = x - 3$ d) $3y + 2x = 3$
8. Dada la recta de ecuación $y = -x + 2$, hallar tres puntos que pertenezcan a la misma.
9. ¿La recta de ecuación $y = 4x + 6$, pasa por el punto $(1,0)$? ¿Y por el punto $(0,2)$?

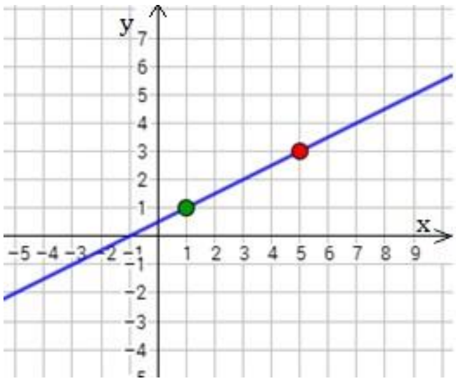
Cómo graficar una recta

Con lo visto hasta el momento, tenemos varias herramientas que nos permitirán graficar a una recta de acuerdo con los datos que tengamos sobre la misma.

Como primera medida, antes de graficar una recta o cualquier figura geométrica en el plano coordenado, debemos marcar los ejes coordenados, ponerles sus nombres y marcar la flecha en el lado positivo de cada eje, seleccionar la unidad de medida y colocar al menos una referencia en cada eje.

- Para poder graficar una recta, basta con conocer dos puntos de la misma, ya que dos puntos determinan una única recta. Marcamos los mismos en un gráfico y luego trazamos la recta que pasa por esos dos puntos.



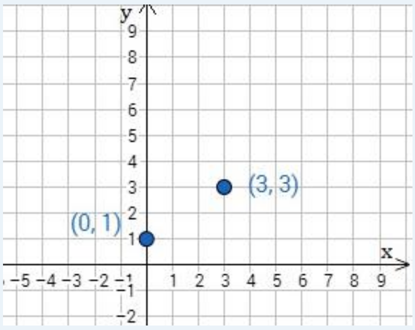


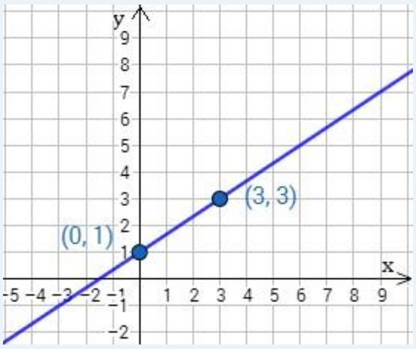
Para graficar la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 1$, podemos obtener dos puntos de la misma para proceder como se indicó antes. Por ejemplo, podemos calcular cuáles son los puntos cuando $x = 0$ y $x = 3$.

Si $x = 0$, tenemos que $y = 1$, es decir que el punto $(0,1)$ pertenece a la recta.

Si $x = 3$, tenemos que $y = 3$, de donde el punto $(3,3)$ pertenece a la recta.

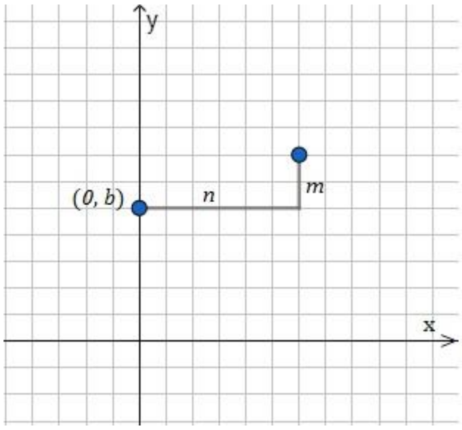
Ahora trazamos la recta que pasa por esos dos puntos.

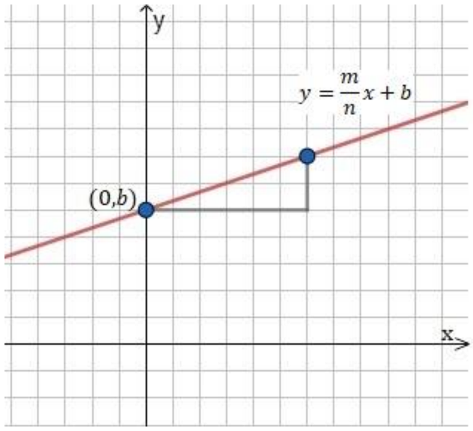




- Otra manera de graficar una recta es marcar sobre el eje y el valor de la ordenada al origen, y de ahí movernos de acuerdo a la pendiente, tantas unidades como indique el numerador (hacia arriba o abajo dependiendo del signo del mismo), y tantas unidades a la derecha como el denominador. Observemos que, si la pendiente es un número entero, entonces el denominador vale 1.

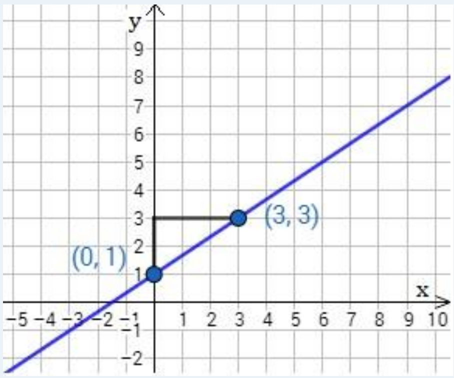
  Es decir, si la ecuación de la recta es $y = \frac{m}{n}x + b$, con $m, n > 0$ marcamos el punto $(0, b)$ y de ahí nos movemos n unidades hacia la derecha y m hacia arriba hasta que llegamos a un nuevo punto y lo marcamos. Por último, unimos esos dos puntos marcados, obteniendo, así, la gráfica de la recta.





Podemos proceder de manera análoga para graficar una recta cuando tenemos la ecuación punto-pendiente de la misma, ubicando el punto dado en el plano y utilizando el dato de la pendiente para ubicar otro punto. Una vez que tenemos los dos puntos, podemos graficar la recta.

> Si queremos graficar la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 1$ observamos que la ordenada al origen vale 1, por lo que marcamos el 1 del eje y. Como la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ a partir del 1 nos movemos 2 unidades hacia arriba y 3 hacia la derecha, llegando al punto $(3{,}3)$.
> Ahora unimos con una recta ambos puntos marcados.



Actividades

10. Graficar las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

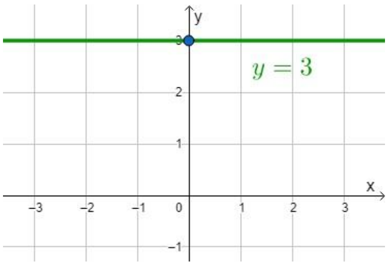
a) $y - 1 = -x$
b) $y = \frac{2}{3}(x + 2)$
c) $y - 2x + 2 = 0$
d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
e) $y = 2x + 3$
f) $y = x$
g) $y = -x$
h) $y - 3x = 0$

11. Representar en un plano coordenado la recta con pendiente $\frac{1}{3}$ y ordenada al origen 1 sin hallar la ecuación de la misma.

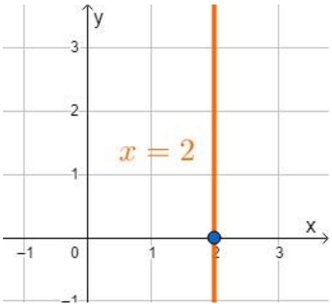
12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,-1)$ y $(3,4)$. Escribir la ecuación en la forma punto-pendiente, explícita e implícita y graficar la recta.

Rectas verticales y horizontales

Las **rectas horizontales** son rectas paralelas al eje x que tienen pendiente cero. Su ecuación será de la forma $y = c$.

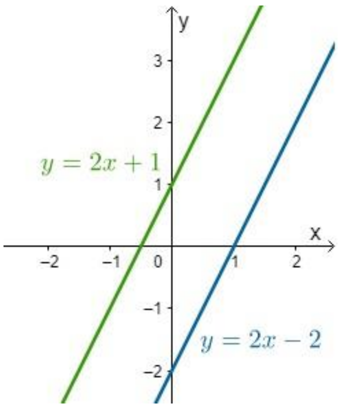


Las **rectas verticales** son las rectas paralelas al eje y. Para este tipo de rectas, la pendiente no está definida. Su ecuación será de la forma $x = a$.



Rectas paralelas

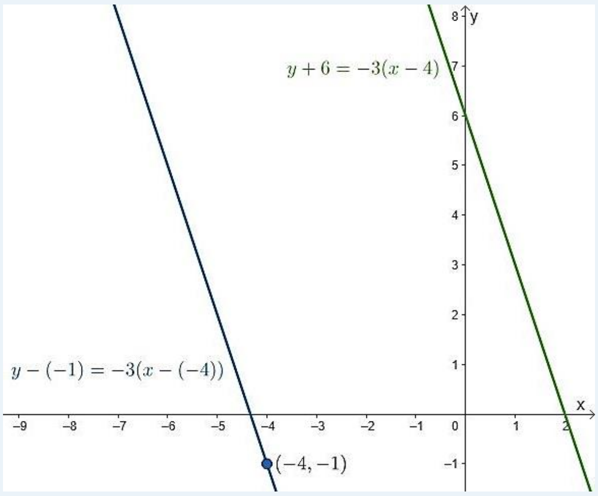
Las rectas de ecuaciones $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$ son **paralelas** si $m_1 = m_2$. Como la pendiente nos dice cuál es la inclinación de la recta, lo que estamos diciendo es que dos rectas son paralelas si tienen la misma inclinación, como se puede observar en el siguiente ejemplo:



Notar que solamente nos interesa la pendiente de la recta, y no la ordenada. Si tanto la pendiente como la ordenada coinciden, la recta es la misma. Consideramos que toda recta es paralela a sí misma.

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-4,-1)$ y es paralela a la recta de ecuación $y+6=-3(x-4)$ es

$$y-(-1)=-3(x-(-4))$$



Hallar la recta que es paralela a la recta de ecuación $2y-3x=6$ *y que pasa por el punto* $(2,-1)$.

Para hallar la ecuación de la recta pedida, debemos saber primero cuál es la pendiente de la recta paralela. Como esta recta tiene ecuación $2y-3x=6$, *podemos despejar la variable* y *para tener la ecuación explícita y poder hallar la pendiente. Para esto, sumemos* $3x$ *en ambos miembros para obtener la igualdad*

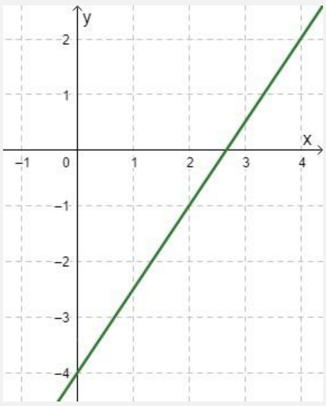
$$2y=6+3x.$$

Luego, podemos dividir ambos miembros por 2, *de lo que obtendremos*

$$y=3+\frac{3}{2}x$$

Entonces, podemos deducir que la pendiente de la recta dada es $\frac{3}{2}$. *Como queremos hallar una recta paralela a esta, sabemos que tendrá la misma pendiente. Y, como además queremos que la recta pase por el punto* $(2,-1)$, *podemos utilizar la ecuación punto-pendiente para hallar la ecuación de la recta pedida*

$$y+1=\frac{3}{2}(x-2).$$



Una recta paralela a una recta vertical será también una recta vertical.

> Las rectas de ecuaciones $x = 4$ y $x = -1$ son rectas paralelas.

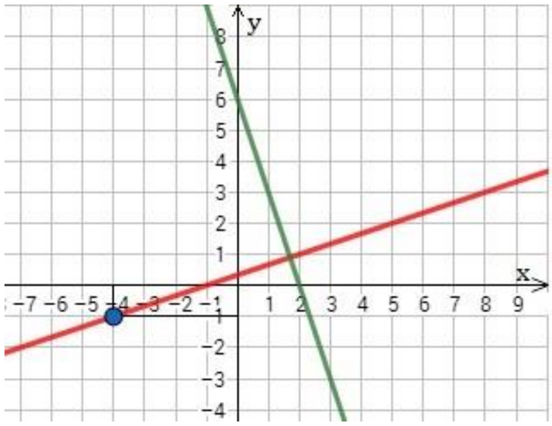
Rectas perpendiculares

Las rectas de ecuaciones $y = m_1 x + b_1$ e $y = m_2 x + b_2$ son **perpendiculares** si se cortan con un ángulo de $90°$. Esto ocurre cuando

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Esta misma propiedad se puede expresar como $m_1 . m_2 = -1$.

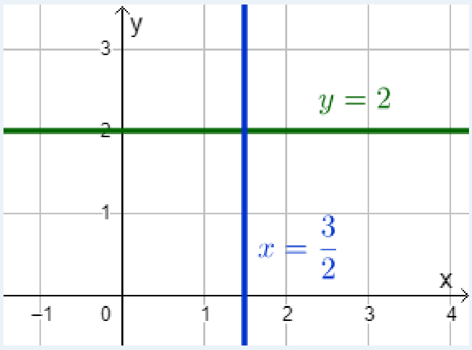
> La ecuación de la recta perpendicular a la recta dada por la ecuación $y + 6 = -3(x - 4)$ y que pasa por el punto $P(-4, -1)$ es
>
> $$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - (-4))$$



Si graficamos ambas rectas en un mismo sistema de coordenadas, es importante que los ejes tengan las mismas unidades de medida, o no se verá reflejada la perpendicularidad de ambas rectas.

Las rectas perpendiculares a las verticales son las horizontales y viceversa.

> Las rectas de ecuaciones $y = 2$ y $x = \frac{3}{2}$ son perpendiculares



Actividades

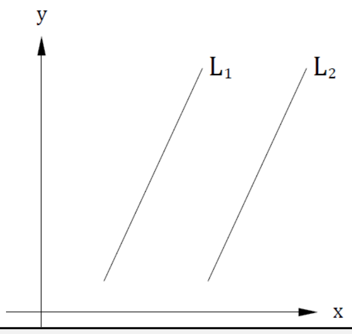
13. Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación $y + 2 = -(x + 1)$ que pasa por el punto $(1, -1)$.
14. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación $y - 3 = 2x + 1$ que pasa por el punto $(0,2)$.
15. Determinar si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares, o ninguna de las dos cosas:
    - a) $y - 3x = 2;$ $\quad 2y - 2 = 6x$
    - b) $x + y = 0;$ $\quad x = y + 1$
    - c) $2x + 5y = 2;$ $\quad 5x + 2y = 1$

Interpretación geométrica de la relación entre dos rectas

Consideremos dos rectas L_1 y L_2 de ecuación:

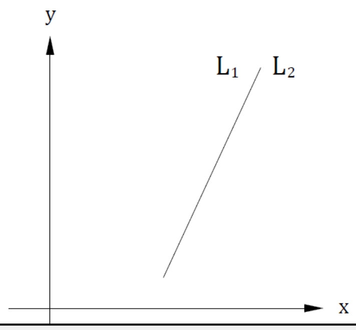
$$L_1: y = m_1x + b_1$$
$$L_2: y = m_2x + b_2$$

De acuerdo con los valores de m_1, m_2, b_1 y b_2, podemos tener las siguientes situaciones:



L_1 y L_2 son paralelas

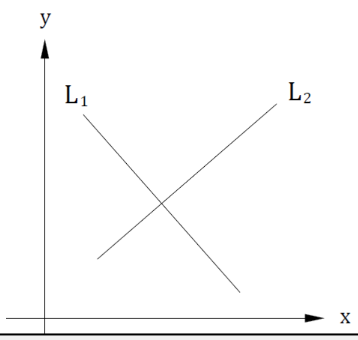
$m_1 = m_2$



L_1 y L_2 son paralelas y coincidentes

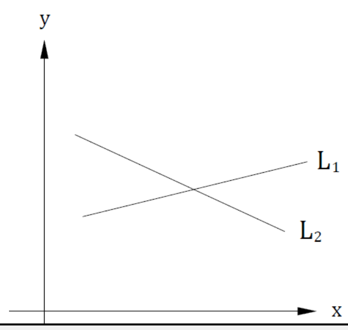
$m_1 = m_2$

$b_1 = b_2$



L_1 y L_2 son perpendiculares

$m_1 . m_2 = -1$



L_1 y L_2 no son paralelas ni perpendiculares y se intersecan en un punto

$m_1 \neq m_2$

$m_1 . m_2 \neq -1$

Actividades

16. Hallar la ecuación de la recta que:
    a) pasa por los puntos $P(1,2)$ y $Q(0,-3)$.
    b) tiene pendiente $m=-\frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(-4,2)$.
    c) pasa por $(3,5)$ y es paralela a la recta de ecuación $2x-6y=4$.
    d) pasa por $(-1,-4)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $6x+2y=8$.
    e) pasa por $(4,5)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y=2$.
17. Expresar las ecuaciones de las siguientes rectas de forma explícita e implícita:
    a) $4x-3y=4$
    b) $x+5y=1$
    c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$
    d) $2x-4y+4=0$
18. Escribir la ecuación de la recta paralela y la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación $y=-\frac{1}{2}x+1$ que pasen por el punto $P(4,3)$. Dibujar la recta dada y las dos halladas en un mismo sistema de ejes coordenados.
19. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta de ecuación $7x-5y+15=0$. Graficar dicha recta.

Sistemas de ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones distintas que conforman un problema matemático. Las **soluciones** de un sistema de ecuaciones son aquellos valores que verifican o satisfacen todas las ecuaciones a la vez. Al conjunto conformado por todas las soluciones del sistema se lo llama **conjunto solución** del sistema.

En algunos casos, los sistemas de ecuaciones surgen de modelizar situaciones problemáticas, y encontrarle solución al sistema nos va a permitir tener una solución del problema planteado.

Un sistema de ecuaciones se escribe agrupando con una llave, las ecuaciones que lo forman.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 4 = y \end{cases}$$

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Existen muchos tipos de sistemas de ecuaciones, dependiendo de la cantidad de incógnitas o del tipo y cantidad de ecuaciones que lo forman. En esta materia estudiaremos algunos de estos casos.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Si el sistema tiene dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, el conjunto solución estará formado por los pares de números que hacen que las dos igualdades sean ciertas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales.

En este caso, un par ordenado (x_1, y_1) es solución del sistema si al reemplazar x por x_1 e y por y_1 en cada ecuación del sistema se verifican las mismas.

El sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

tiene el par ordenado $(2,3)$ como una solución.

Esta solución es válida, ya que si $x = 2$ e $y = 3$, reemplazando tenemos que

$$\begin{cases} 3.2 - 4.3 = -6 \\ 2.2 + 4.3 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 4 + 12 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 16 = 16 \end{cases}$$

Y, como se obtienen dos identidades, tenemos que $(2,3)$ es una solución del sistema.

Actividades

20. Comprobar y justificar si los pares ordenados $(1,-1)$ y $(-7,-7)$ son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 7x+8y=-105 \end{cases}$$

Como ambas ecuaciones son lineales y su representación gráfica son rectas, cuando buscamos solución del sistema, lo que queremos hallar es el o los puntos de intersección entre las rectas.

Si representamos ambas rectas en un mismo gráfico, podemos tener una idea aproximada de cuál será la solución del sistema, pero la resolución gráfica puede ser imprecisa, por ello estudiaremos, a continuación, tres métodos analíticos de resolución.

Métodos de resolución

Para resolver sistemas, se utilizan habitualmente los denominados métodos algebraicos: métodos de sustitución, método de igualación y método de reducción.

Método de sustitución

- Paso 1: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
- Paso 2: Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
- Paso 3: Se resuelve la ecuación de una sola incógnita obtenida en el paso anterior.
- Paso 4: El valor obtenido de una de las variables al resolver la ecuación se sustituye en la expresión obtenida en el paso 1, de esta manera, se obtiene el valor de la otra variable.
- Paso 5: Los dos valores obtenidos constituyen una solución del sistema.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x-4y=-6 & (1) \\ 2x+4y=16 & (2) \end{cases}$$

Paso 1: Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos, por ejemplo, la incógnita x.

De la ecuación (2), tenemos que $2x=16-4y$ *de donde deducimos que*

$$x=8-2y.$$

Paso 2: Sustituimos en la ecuación (1) la variable x, por la expresión anterior.

Nos queda

$$3(8-2y)-4y=-6$$

Paso 3: Resolvemos la ecuación obtenida

$$24-6y-4y=-6 \quad \rightarrow \quad -10y=-30 \qquad \rightarrow \qquad y=3$$

Paso 4: Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2.3 = 8 - 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Paso 5: Como los valores obtenidos son $x = 2$ e $y = 3$, tenemos que el conjunto solución es $S = \{(2,3)\}$.

Método de igualación

- Paso 1: Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Paso 2: Se igualan las expresiones obtenidas en el paso anterior obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
- Paso 3: Se resuelve la ecuación del paso anterior.
- Paso 4: El valor obtenido al resolver la ecuación se sustituye en cualquiera de las dos expresiones del paso 1.
- Paso 5: El par ordenado con los valores de x e y obtenidos es una solución del sistema.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x + 4y = 16 & (2) \end{cases}$$

Paso 1: Despejamos, por ejemplo, la incógnita x de la ecuación (1) y la ecuación (2), obteniendo

$$3x = -6 + 4y \quad \rightarrow \quad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \quad \rightarrow \quad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

Paso 2: Igualamos ambas expresiones

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$$

Paso 3: Resolvemos la ecuación

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y)$$

$$-12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12$$

$$20y = 60$$

$$y = 3$$

Paso 4: Sustituimos el valor de y en una de las dos expresiones en las que tenemos despejada la x

$$x = \frac{-6 + 4.3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Paso 5: Dado que obtuvimos los valores $x = 2$ e $y = 3$, tenemos que el conjunto solución es $S = \{(2,3)\}$.

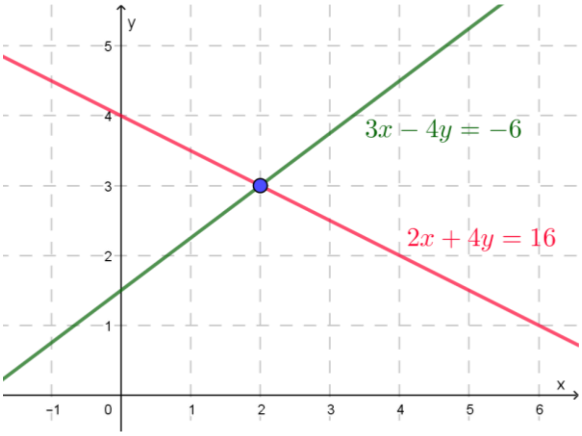
Método de reducción por suma o resta

- Paso 1: Necesitamos que el coeficiente de alguna incógnita sea igual en las dos ecuaciones. Si no se cumple esto, multiplicamos una o las dos ecuaciones por un número conveniente.

- Paso 2: Si los signos de los coeficientes coinciden, restamos ambas ecuaciones. Si los signos son opuestos, las sumamos. Se obtiene, de esta manera, una ecuación de una sola variable.
- Paso 3: Se resuelve la ecuación resultante en el paso anterior.
- Paso 4: El valor obtenido de una de las variables se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve para encontrar el valor de la otra variable.
- Paso 5: Los dos valores obtenidos constituyen una solución del sistema.

> Resolver el sistema
>
> $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x + 4y = 16 & (2) \end{cases}$$
>
> Paso 1: Lo más fácil es suprimir la y, de este modo, no tendríamos que operar con las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.
>
> $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & \xrightarrow{por\ 2} \\ 2x + 4y = 16 & \xrightarrow{por -3} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$
>
> Paso 2: Sumamos y resolvemos la ecuación:
>
> $$\begin{array}{r} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \\ \hline -20y = -60 \end{array}$$
>
> Paso 3: Resolvemos para hallar el valor
>
> $$y = 3$$
>
> Paso 4: Sustituimos el valor de y en la ecuación inicial (2)
>
> $$2x + 4.3 = 16$$
>
> $$2x + 12 = 16$$
>
> $$2x = 4$$
>
> $$x = 2$$
>
> Paso 5: Tenemos, entonces, que $x = 2$ e $y = 3$, por lo que el conjunto solución es $S = \{(2,3)\}$.

La siguiente es la representación gráfica del sistema, donde podemos ver que la intersección de las rectas es efectivamente el punto $(2,3)$



La representación gráfica solo comprueba que la solución hallada analíticamente es correcta, pero no es suficiente para obtener soluciones.

Actividades

21. Resolver los siguientes sistemas utilizando un método diferente para cada uno:

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 8y = -13 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

Clasificación de sistemas según la cantidad de soluciones

Según la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones, estos se clasifican de la siguiente manera:

- Un sistema es compatible determinado cuando tiene una única solución.
- Un sistema es compatible indeterminado cuando tiene infinitas soluciones.
- Un sistema es incompatible cuando no tiene solución.

En resumen:

$$Tipos\ de\ sistemas \begin{cases} Compatible & \begin{cases} Determinado \\ Indeterminado \end{cases} \\ Incompatible \end{cases}$$

Veamos, a continuación, un ejemplo de cada uno de estos casos, realizando su interpretación geométrica.

Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} L_1: 2x + y = 6 \\ L_2: 2x - y = 4 \end{cases}$$

Si sumamos las ecuaciones, obtenemos

$$4x = 10$$

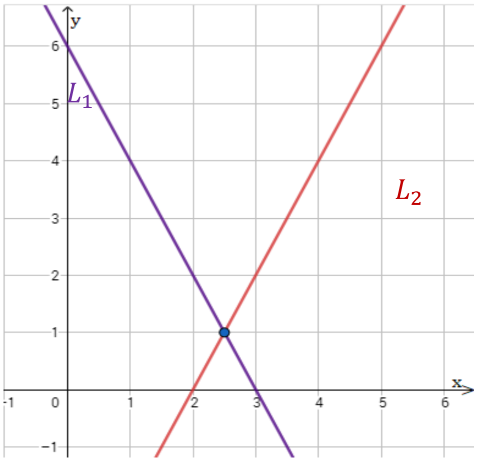
De lo que podemos deducir que $x = \frac{5}{2}$. Si reemplazamos este valor en la primera ecuación, tenemos

$$2.\frac{5}{2} + y = 6$$

de donde $y = 1$.

Por lo tanto, el sistema tiene una única solución y el conjunto solución es $S = \left\{\left(\frac{5}{2}, 1\right)\right\}$.

Si representamos gráficamente las rectas, vemos que las dos rectas se cortan en el punto $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$. Esto nos permite verificar geométricamente el resultado que obtuvimos analíticamente.



Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} L_1:\ 2x - y = 3 & (1) \\ L_2:\ -2x + y = -3 & (2) \end{cases}$$

Si despejamos la variable y de la ecuación (1), obtenemos:

$$y = 2x - 3 \qquad (3)$$

Al reemplazar esta ecuación en la ecuación (2), tenemos

$$-2x + (2x - 3) = -3$$

es decir,

$$-2x + 2x - 3 = -3.$$

Si operamos, obtenemos

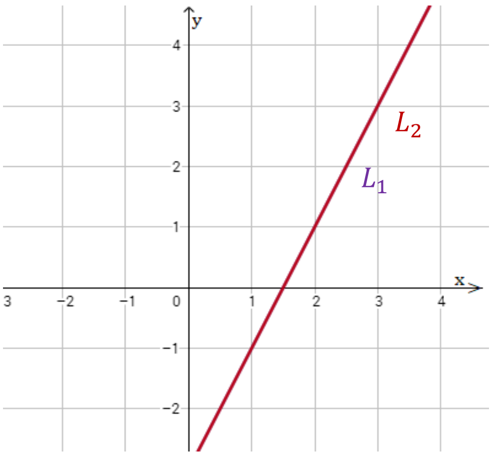
$$(-2 + 2).x = 0$$

$$0.x = 0$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones para x . Además, para cualquier número x, se debe cumplir la ecuación (3), es decir que las soluciones del sistema van a ser aquellos pares ordenados, tales que $y = 2x - 3$. Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x - 3\}.$$

Si representamos gráficamente las rectas dadas por las ecuaciones del sistema, podemos observar que las mismas son coincidentes, es decir, tienen todos los puntos comunes. Todas las soluciones de una ecuación son también soluciones de la otra. El sistema tiene infinitas soluciones, que se corresponden con los puntos de la recta.



Sistema incompatible

$$\begin{cases} L_1: y - 5x = 2 & (1) \\ L_2: 2y - 10x = -6 & (2) \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en la ecuación (1), tenemos

$$y = 5x + 2$$

Ahora, si reemplazamos esta última ecuación en (2), obtenemos

$$2(5x + 2) - 10x = -6$$

Si aplicamos la propiedad distributiva en el primer término, nos queda

$$10x + 4 - 10x = -6$$

Y, despejando, tenemos

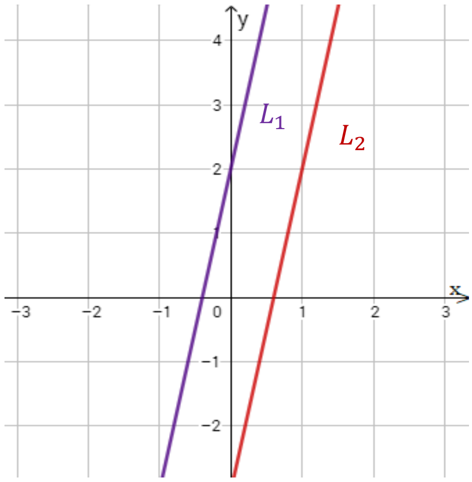
$$(10 - 10).x = -6 - 4$$

es decir,

$$0.x = -10$$

Dado que ningún valor de x puede verificar esta igualdad, el sistema no tiene solución y decimos que el conjunto solución es vacío; en símbolos, $S = \emptyset$ o $S = \{\ \}$.

Si representamos gráficamente las rectas correspondientes al sistema de ecuaciones, podemos observar que las dos rectas son paralelas, y tienen distintas ordenadas, es decir, no se intersecan y, por lo tanto, no tienen ningún punto en común.



En resumen, tenemos el siguiente cuadro:

Tipo de sistema	Soluciones	Condición de pendientes	Condición de ordenadas
Compatible Determinado	Única solución	$m_1 \neq m_2$	-
Compatible Indeterminado	Infinitas soluciones	$m_1 = m_2$	$b_1 = b_2$
Incompatible	Sin solución	$m_1 = m_2$	$b_1 \neq b_2$

La mayoría de las representaciones gráficas del material están realizadas con el software de matemática GeoGebra[2], que es un software de código abierto y uso libre. Es una herramienta útil para geometría, álgebra, estadística y cálculo que, además, se utiliza en la Cátedra Matemática A de esta facultad. Con este u otro graficador, podrás corroborar lo calculado analíticamente en varios ejercicios y visualizar las gráficas.

Hallar el valor de k para que el siguiente sistema sea:

a) compatible indeterminado

b) incompatible

c) compatible determinado

$$\begin{cases} y - 4 = k^2 x \\ y - 16x = k \end{cases}$$

Para hallar los valores de k pedidos en cada inciso, es conveniente expresar a ambas ecuaciones del sistema como la ecuación explícita de una recta. Tenemos, entonces, que

$$\begin{cases} y = k^2 x + 4 \\ y = 16x + k \end{cases}$$

de donde $m_1 = k^2$, $b_1 = 4$, $m_2 = 16$ y $b_2 = k$.

Para que el sistema sea compatible indeterminado, necesitamos que $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$, es decir que necesitamos que $k^2 = 16$ y $k = 4$. Por lo tanto, $k = 4$ es la respuesta que buscábamos.

Para que el sistema se incompatible, necesitamos que $m_1 = m_2$, pero $b_1 \neq b_2$, y, por lo tanto, buscamos que $k^2 = 16$ y $k \neq 4$. Vemos, entonces, que $k = -4$ es el valor buscado.

Para que el sistema sea compatible determinado, solo necesitamos que $m_1 \neq m_2$ sin importar los valores de b_1 y b_2. Tenemos, entonces, que $k^2 \neq 16$, por lo que los valores de k que buscábamos son $k \in \mathbb{R} - \{4, -4\}$.

Actividades

22. Hallar algebraicamente las soluciones de los siguientes sistemas y clasificarlos en compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles.

a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x = 6 - 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5y = 30 - 10x \\ 2x + y = -2 \end{cases}$

[2] https://www.geogebra.org

23. Resolver los siguientes sistemas lineales

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = \frac{2}{3} \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = \frac{2}{3}x - y \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$

24. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} k^2x = y - 8 \\ 4k = 2y - 32x \end{cases}$ analizar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$ y d_3 son números reales. Diremos que (x_0, y_0, z_0) es una solución del sistema si, al reemplazar x por x_0, y por y_0 y z por z_0, se verifican las tres ecuaciones.

Un método para resolver sistemas de más de dos ecuaciones con más de dos incógnitas se basa en reducir el problema a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, despejando alguna de las variables de una ecuación y reemplazando en las demás ecuaciones.

Veamos un ejemplo:

Resolver el sistema $\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 & (1) \\ x - y + 2z = -3 & (2) \\ x + 2y + z = 4 & (3) \end{cases}$

Elegimos despejar, por ejemplo, a x *de la ecuación* (3) *y obtenemos entonces* $x = 4 - 2y - z$. *Reemplazamos esta expresión en las otras dos ecuaciones y obtenemos*

$$\begin{cases} 3(4 - 2y - z) + 2y - z = 8 \\ (4 - 2y - z) - y + 2z = -3 \end{cases}$$

Distribuyendo y asociando, tenemos

$$\begin{cases} -4y - 4z = -4 \\ -3y + z = -7 \end{cases}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, lo podemos resolver con cualquiera de los tres métodos vistos antes, y obtendremos que $y = 2$ *y* $z = -1$. *Volviendo a la ecuación* (3) *que teníamos despejada, obtenemos que*

$$x = 4 - 2.2 - (-1) = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $S = \{(1,2,-1)\}$.

Actividades

25. Analizar si $(1,-1,2)$ es solución de los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ 3x-z=1 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y-z=1 \\ 5x+2y+z=5 \end{cases}$

26. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} -5x+y+3z=-7 \\ -x+y+5z=-3 \\ -3y+z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x+y+z=0 \\ 2x+5z=6 \\ 3x+\frac{1}{2}y+z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x-y+4z=3 \\ x-y+z=-7 \\ x+z=4 \end{cases}$

Problemas de aplicación

Tal como vimos en el capítulo 2 con las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones nos serán útiles para hallar soluciones de distintos problemas. Para poder hacerlo, debemos identificar las variables, definirlas y buscar las relaciones que hay entre ellas de acuerdo a lo indicado por el enunciado, para poder escribirlas matemáticamente mediante ecuaciones. Una vez que hemos planteado las ecuaciones, podremos resolver el sistema con alguno de los métodos que hemos estudiado. Al terminar, es recomendable verificar que la solución hallada cumpla realmente con lo pedido en el enunciado.

Un número consta de dos cifras que suman 9. Dicho número supera en 9 unidades al que resulta de invertir el orden de sus cifras. ¿De qué número se trata?

<u>Planteo</u>: Representaremos por x a la primera cifra, que es la de la decena, y por y a la segunda, que es la de la unidad.

Así, el número pensado estaría representado por $10x+y$.

Dado que las dos cifras suman 9, nos queda que $x+y=9$.

Como nos dice que el número es igual al que resulta de invertir sus cifras más 9*, tenemos que pensar que, al invertir las cifras, el nuevo número será* $10y + x$*, entonces, obtenemos la ecuación*

$$10x + y = 10y + x + 9$$

que puede reducirse a la ecuación

$$9x - 9y = 9 \qquad \rightarrow \qquad x - y = 1$$

Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar la solución del sistema

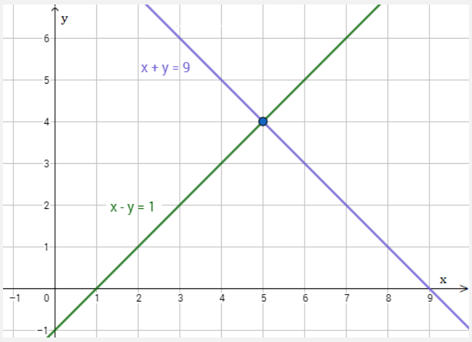
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución: Podemos despejar x *de ambas ecuaciones e igualarlas, obteniendo que*

$$9 - y = 1 + y$$

de donde calculamos que $y = 4$ *y, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones, se tiene que* $x = 5$*.*

La representación gráfica de las rectas de este sistema de dos ecuaciones será



Respuesta: El número que nos piden es el 54*.*

Se puede comprobar que la suma de las dos cifras de 54 *es* 9 *y que* $54 = 45 + 9$*.*

Un concesionario compra un auto y una moto pagando en total $\$125000$ *y los vende por* $\$143500$*. ¿Cuál fue el precio de compra de cada vehículo si en la venta del auto ganó el* 15% *y en la de la moto, el* 10%*?*

Planteo: Representamos por x *el precio de compra del auto, y por* y *el precio de compra de la moto.*

Traducimos ahora al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado.

El precio de compra de los dos vehículos es de $\$125000$*.*

$$x + y = 125000$$

El precio de venta de los vehículos es de $\$143500$*, pero por el auto tiene una ganancia del* 15%*, entonces, el precio de venta del auto es*

$$x + \frac{15}{100}x = \frac{115}{100}x = \frac{23}{20}x$$

Y por la moto tiene una ganancia del 10%, *por lo que el precio de venta de la moto es*

$$y+\frac{10}{100}y=\frac{110}{100}y=\frac{11}{10}y$$

Por lo tanto, por ambos vehículos, el precio de venta queda

$$\frac{115}{100}x+\frac{110}{100}y=143500$$

Obtenemos, así, el sistema

$$\begin{cases} x+y=125000 & (1) \\ \frac{23}{20}x+\frac{11}{10}y=143500 & (2) \end{cases}$$

<u>*Resolución:*</u> *Resolvemos el sistema con el método que elijamos. En este caso, despejaremos* x *de la ecuación* (1), *la sustituimos en la ecuación* (2) *y resolvemos*

$$\frac{23}{20}(125000-y)+\frac{11}{10}y=143500$$

$$143750-\frac{23}{20}y+\frac{11}{10}y=143500$$

$$250=\frac{1}{20}y$$

$$5000=y$$

Entonces, reemplazando

$$x=125000-5000=120000$$

<u>*Respuesta:*</u> *El auto costó* $\$120000$ *y la moto* $\$5000$.

Podemos verificar que la suma de $\$120000$ *y* $\$5000$ *es* $\$125000$.

El 15% *de* $\$120000$ *es* $\$18000$ *y el* 10% *de* $\$5000$ *es* $\$500$, *entonces, el precio de venta es* $\$120000+\$18000+\$5000+\$500=\$143500$.

Actividades

27. Asociar, al siguiente problema, el sistema de ecuaciones que se usaría para resolverlo e indicar, para el sistema seleccionado, qué representan las variables x e y. María y Alex son hermanos y entre los dos suman 19 años, y sabemos que la edad de María menos uno es igual a la mitad de la edad de Alex.

    a) $\begin{cases} x+y=19 \\ \frac{x}{2}-1=y \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x+y=19 \\ x+1=\frac{y}{2} \end{cases}$

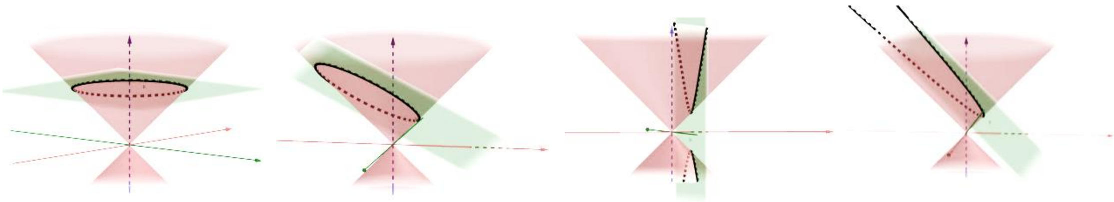
    c) $\begin{cases} x+y=19 \\ x-1=\frac{y}{2} \end{cases}$

28. Tres cuadernillos y dos marcadores cuestan $\$250$. Dos marcadores y un cuadernillo cuestan $\$90$. Calcular el precio de un cuadernillo y el de un marcador.

29. Determinar las medidas de los lados de un triángulo isósceles de $50\ cm$ de perímetro, sabiendo que el lado desigual mide $5\ cm$ más que cada uno de los lados iguales.
30. Un comerciante compra dos productos por $\$350$ y los vende por $\$325$ ¿Cuánto costó cada producto si, en la venta de uno, pierde el 10%, y en la del otro, el 5%?
31. La edad de un hijo es un cuarto de la edad de su padre y hace seis años era un séptimo de la edad de su padre. ¿Cuántos años tienen ambos?
32. La suma de las edades actuales de Manuel, José y Pedro es 100. Hace 5 años, la edad de Manuel era la mitad de la edad de José y hoy es la mitad de la edad de Pedro. Averiguar cuántos años tienen todos actualmente.
33. Un triángulo tiene lados de longitudes a, b y c. Si su perímetro es de $15\ cm$ y se sabe que la suma de a y c es igual al doble de b y que la diferencia del doble de c con b da el triple de a, ¿cuánto miden los lados del triángulo?
34. Una familia consta de una madre, un padre y un hijo. La suma de las edades actuales de los tres es de 80 años. Además, la edad del padre más 6 es igual a la suma de las edades de la madre y del hijo. Si dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre, ¿qué edad tiene cada uno actualmente?

Secciones cónicas

Se denomina **sección cónica** a una curva determinada por la intersección entre una superficie cónica y un plano que no pase por el vértice. Las cónicas se clasifican en cuatro tipos: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.



Circunferencia **Elipse** **Hipérbola** **Parábola**

Circunferencia

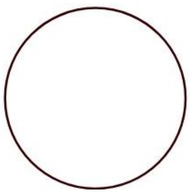
Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo, llamado **centro de la circunferencia.** El segmento que une el centro con cualquier punto sobre la circunferencia se llama **radio**. El segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro se llama **diámetro**, y su longitud es el doble de la longitud del radio.

Los elementos de una circunferencia son:

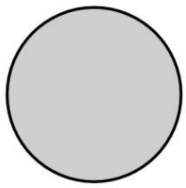
- El **centro**, que usualmente denotaremos por $C(\alpha, \beta)$.
- La constante r, que es la longitud del radio.

Notemos que la longitud del radio es constante, es decir, la distancia entre el centro y un punto cualquiera de la circunferencia no varía. Es muy común referirse a la longitud r simplemente como el radio.

Recordar que una circunferencia es el borde de un círculo. Gráficamente:



Circunferencia



Círculo

Para hallar la ecuación de la circunferencia, recordemos que si P es un punto de coordenadas (x, y) que pertenece a la circunferencia de centro $C(0,0)$ y radio r, entonces, se debe cumplir que la distancia entre P y C es igual a r. Planteando esta distancia y elevando al cuadrado ambos términos, obtenemos la ecuación

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2,$$

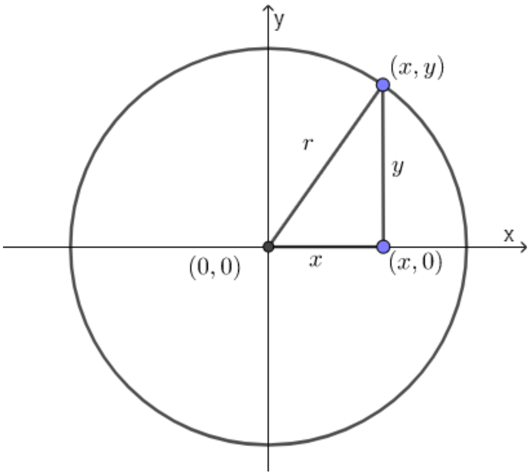
lo que es equivalente a

$$x^2 + y^2 = r^2$$

A esta última, la llamaremos **ecuación canónica de la circunferencia** con centro en $(0,0)$ y radio r.

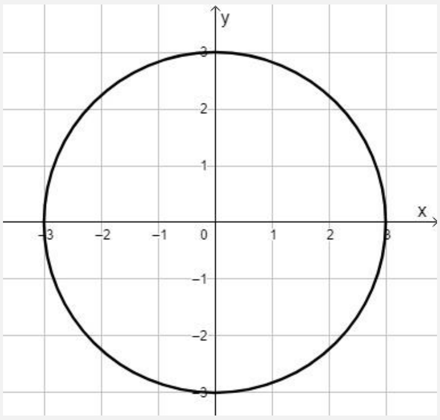
> La ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen y radio igual a 6 es $x^2+y^2=36$.

Una forma gráfica de obtener esta misma ecuación surge de graficar un triángulo rectángulo con un cateto apoyado sobre el eje x y con los vértices $(0,0),(x,0)$ y (x,y) y calcular la distancia del punto P al centro C por medio del Teorema de Pitágoras e igualar dicha distancia a r.



$$x^2+y^2=r^2$$

Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene la siguiente gráfica



Observemos que el centro es el punto $(0,0)$ *y, para obtener el radio, podemos notar que la circunferencia pasa por el punto* $(3,0)$. *Entonces, el radio es igual a la distancia entre los puntos* $(0,0)$ *y* $(3,0)$, *es decir, es igual a* 3.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia dada en el gráfico es

$$x^2+y^2=9.$$

Actividades

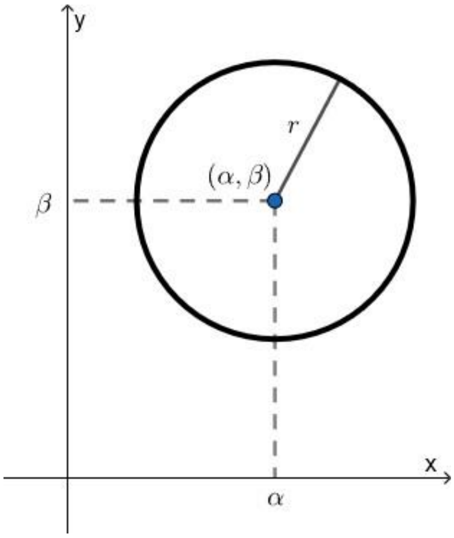
35. Determinar el radio de la circunferencia dada por la ecuación $x^2+y^2=5$ y hallar dos puntos pertenecientes a la misma.
36. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio $r=\sqrt{7}$.

Si ahora queremos que el centro de la circunferencia sea (α, β), en vez del (0,0), tenemos que pensar que estamos trasladando la coordenada x del centro a α y la coordenada y del centro a β.

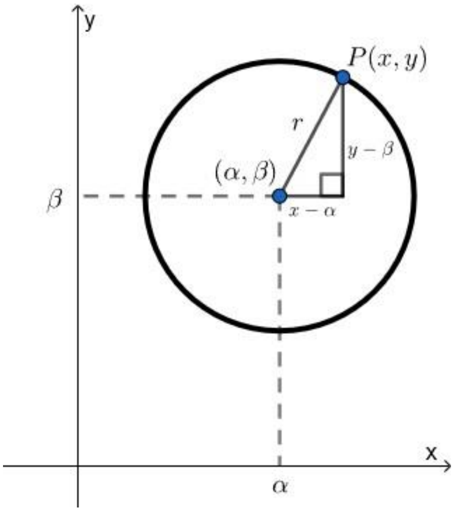
Para ello, sustituimos x por $x - \alpha$ e y por $y - \beta$, y obtenemos la ecuación

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.



Se dice que la circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$ y radio r está desplazada. En cambio, cuando el centro es $(0,0)$, se dice que es una circunferencia centrada en el origen.



La ecuación anterior se puede deducir si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo que queda conformado como en la figura de la izquierda:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Cómo graficar una circunferencia

Graficar una circunferencia es muy sencillo. Primero, debemos ubicar el centro de la misma en un sistema de coordenadas, en el que es recomendable elegir la misma unidad de medida en cada eje.

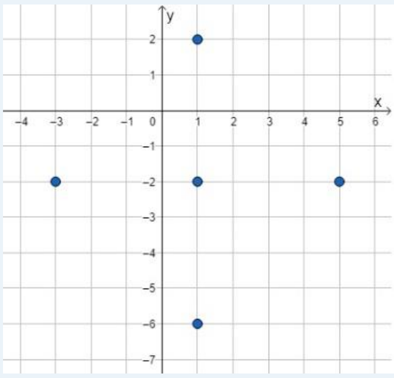
A partir del centro, nos movemos la longitud del radio hacia la derecha y marcamos un punto. Lo mismo se hace hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo (siempre a partir del centro). Ahora unimos esos cuatro puntos con una circunferencia.

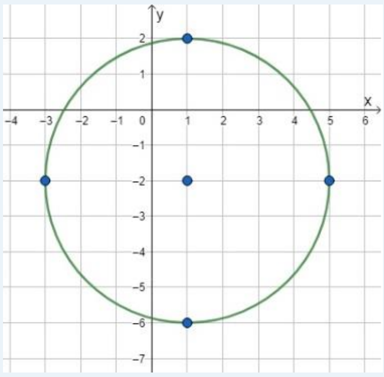
Si se quiere, se puede graficar con compás, pero no es necesario. Lo importante es que la gráfica respete los valores del centro y del radio.

Queremos graficar la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Para esto, primero identificamos que el centro de la circunferencia es el punto $(1,-2)$, y que el radio vale $r=4$.

Ahora nos situamos en el punto $(1,-2)$ y marcamos los puntos que están a cuatro unidades de distancia del centro hacia la derecha, la izquierda, arriba y abajo que son los puntos $(5,-2),(-3,-2),(1,2)$ y $(1,-6)$. Luego, los unimos:





Obtención de la ecuación canónica de la circunferencia

Ahora bien, no siempre tenemos la ecuación de la circunferencia escrita en su forma canónica. A veces, podemos encontrarla con sus cuadrados desarrollados. Para poder obtener el centro y el radio, debemos llevar la ecuación a su forma canónica, completando cuadrados. Este método fue desarrollado en el capítulo 2 para resolver ecuaciones cuadráticas.

¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia dada por la ecuación $x^2-6x+y^2+5y=5$?

Completando cuadrados, obtenemos

$$\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9+\underbrace{y^2+5y+\left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=5$$

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=5+9+\frac{25}{4}=\frac{81}{4}$$

Es decir,

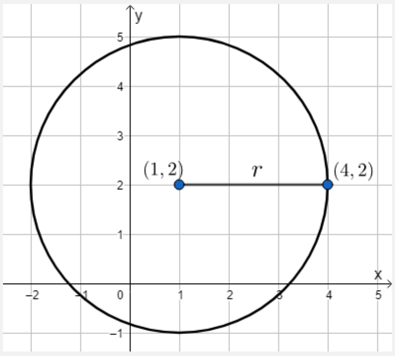
$$(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

Entonces, el centro de la circunferencia es $\left(3,-\frac{5}{2}\right)$ y la longitud del radio es $r=\frac{9}{2}$.

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,2)$ *y que pasa por el punto* $(4,2)$.

Como el centro de la circunferencia es el punto $(1,2)$, *sabemos que la circunferencia estará dada por la ecuación*

$$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2.$$



En este caso, podemos deducir, a partir del gráfico, que el radio mide 3.

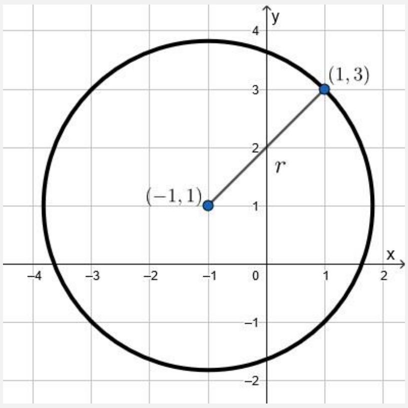
Por lo tanto, la ecuación canónica de la circunferencia es:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2.$$

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(-1,1)$ *y que pasa por el punto* $(1,3)$.

Como el centro de la circunferencia es el punto $(-1,1)$, *sabemos que la circunferencia estará dada por la ecuación*

$$(x+1)^2+(y-1)^2=r^2$$



Para hallar el valor r, *observemos que debe ser igual a la distancia entre los puntos* $C(-1,1)$ *y* $P(1,3)$:

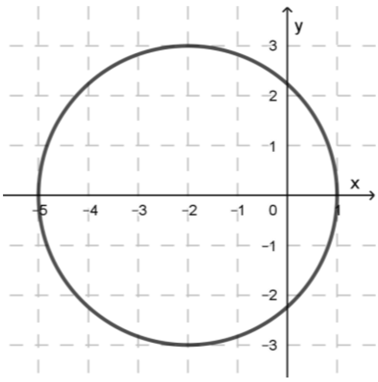
$$d(C,P)=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}.$$

Por lo tanto, la ecuación canónica de la circunferencia es:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$$

Actividades

37. Encontrar la ecuación canónica de las circunferencias que cumplan las siguientes condiciones:
    a) tiene centro en el punto $(1,2)$ y su radio mide 6.
    b) tiene centro en el punto $(-2,5)$ y pasa por $(-2,1)$.
    c) tiene centro en el punto $(0,-3)$ y pasa por $(4,0)$.
    d) tiene centro en el punto $(-1,-3)$ y su diámetro mide $\sqrt{5}$.
    e) tiene centro en el punto $(2,-1)$ y pasa por el punto $(0,2)$.
38. Completando cuadrados, determinar el centro y la longitud del radio de las circunferencias dadas por las siguientes ecuaciones
    a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
    b) $2x^2 + 20x + 2y^2 = -32$
39. Encontrar la ecuación canónica de la siguiente circunferencia

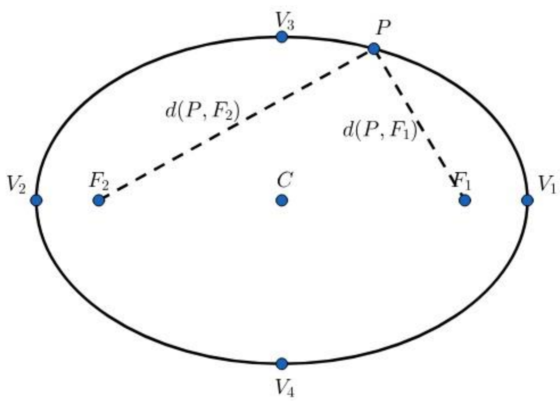


Elipse

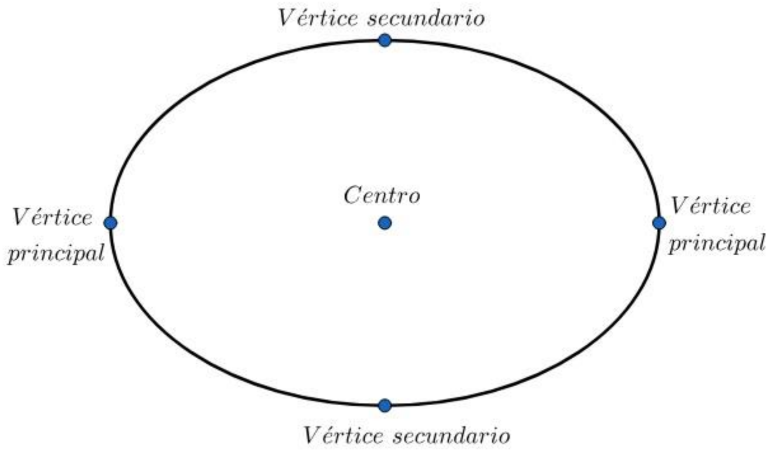
Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano que cumplen la condición de que la suma de las distancias desde cada uno de ellos a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es constante. Es decir, que un punto P está en la elipse si

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

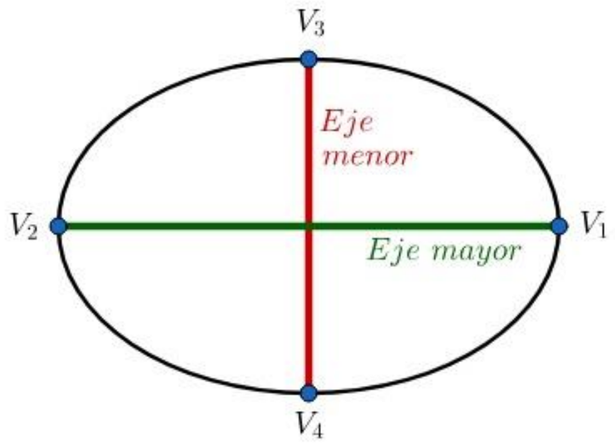
donde $2a$ es una constante positiva.



Los elementos principales de la elipse, que permiten describirla completamente, son el **centro**, que es el punto medio del segmento que une a los focos F_1 y F_2 y los **vértices**, que incluyen los **vértices principales**, que son los dos puntos de la elipse más alejados del centro, y los **vértices secundarios** (o **covértices**), que son los dos puntos de la elipse más cercanos al centro.



Además, una elipse posee un **eje mayor**, que es el segmento determinado por los vértices principales V_1 y V_2, cuya medida es $2a$ y un **eje menor**, que es el segmento determinado por los vértices secundarios V_3 y V_4, cuya longitud diremos que mide $2b$. Los segmentos que unen el centro con un vértice principal o con un vértice secundario, se conocen como **semieje mayor** y **semieje menor**, respectivamente.



La recta que pasa por los focos F_1 y F_2 se conoce como **eje principal** y determina la orientación de la elipse (en este curso la recta será horizontal o vertical).

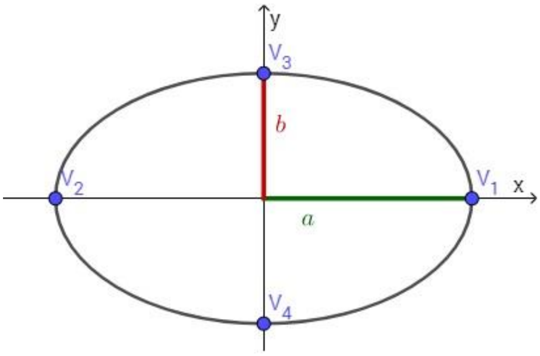
La ecuación más simple de la elipse resulta cuando el eje principal coincide con uno de los ejes coordenados y los focos son simétricos uno del otro respecto al origen, por lo tanto, el centro de la elipse es el origen de coordenadas.

Para todos los casos que vemos, consideramos que $0 < b < a$.

Algunos autores consideran que las constantes a y b pueden ser iguales y, en ese caso, la circunferencia es un caso particular de la elipse, dado que los semiejes son iguales.

- Si el eje principal es horizontal, la ecuación canónica de la elipse centrada en el $(0,0)$ es

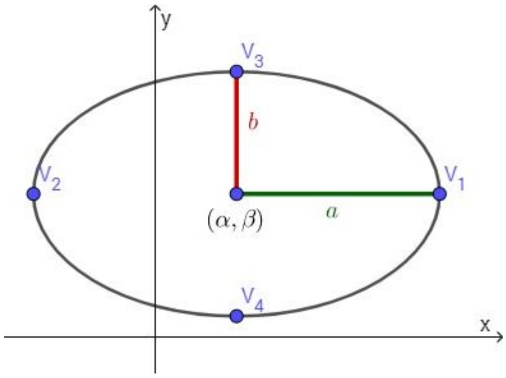
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



- De manera análoga a las traslaciones que hicimos en la circunferencia, si el centro de nuestra elipse es ahora (α,β), y el eje principal es paralelo al eje x, la ecuación canónica es

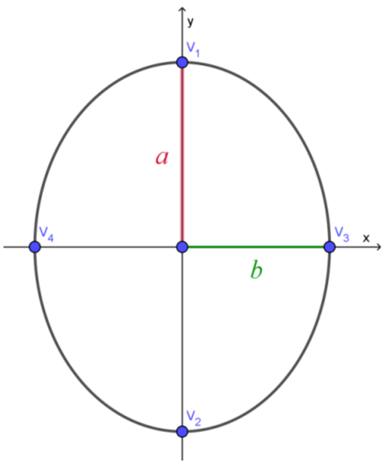
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Ecuación canónica de la elipse con eje principal horizontal



- Si el eje principal es vertical, la ecuación canónica de la elipse centrada en el $(0,0)$ es

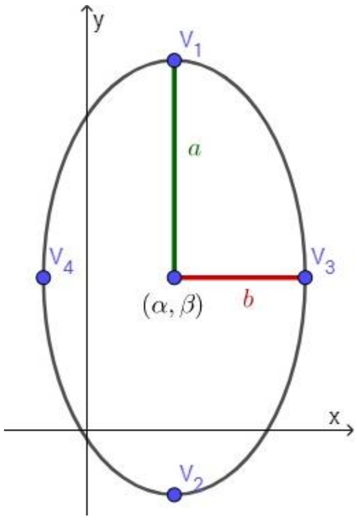
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



- Si el centro es (α, β), la ecuación canónica es

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

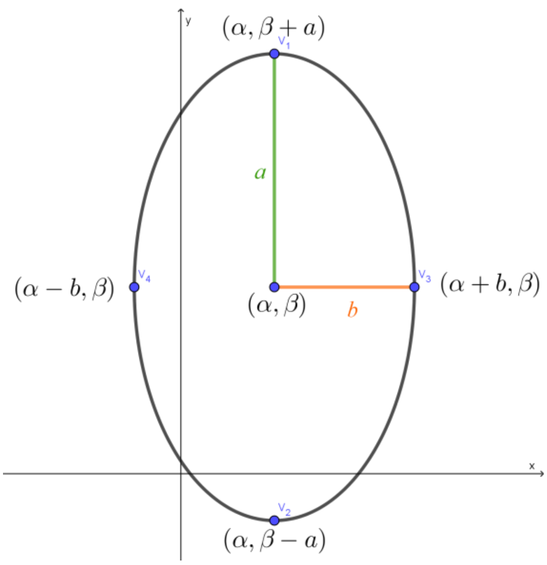
Ecuación canónica de la elipse con eje principal vertical



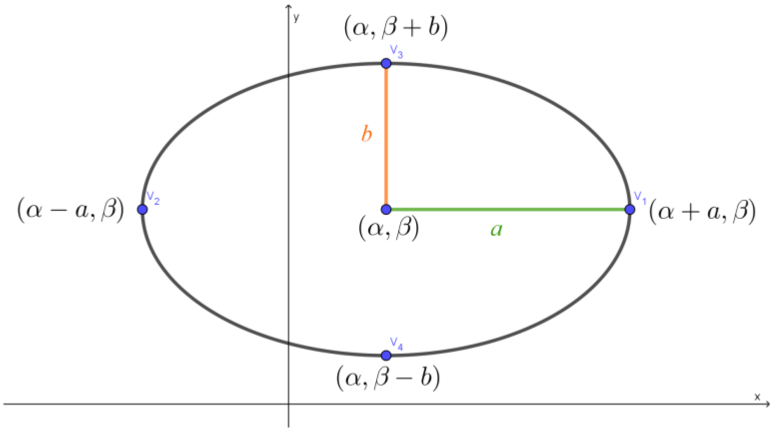
Notemos que llamamos a^2 siempre al denominador más grande de la ecuación canónica de la elipse. Cuando la elipse tiene eje principal horizontal, la constante a^2 es el denominador del término con x^2, mientras que si la elipse tiene eje principal vertical, la constante a^2 es el denominador del término con y^2.

A partir de la ecuación canónica de la elipse, podemos obtener una fórmula general para los vértices principales y secundarios. Cuando lo pensamos gráficamente, se pueden deducir en forma muy sencilla, sin necesidad de recordar las fórmulas que están a continuación. Las expresiones son:

- Si la elipse tiene eje principal vertical, los vértices son $V_1(\alpha, \beta + a)$ y $V_2(\alpha, \beta - a)$ y los vértices secundarios son $V_3(\alpha + b, \beta)$ y $V_4(\alpha - b, \beta)$, lo cual se puede deducir gráficamente



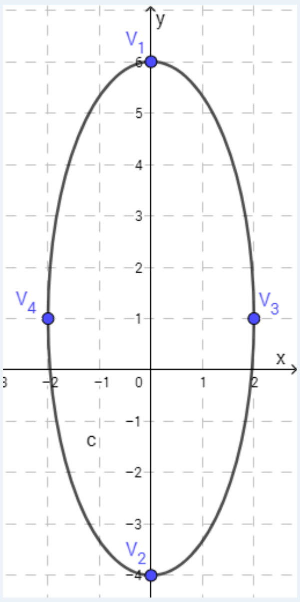
- Si la elipse tiene eje principal horizontal, los vértices son $V_1(\alpha+a,\beta)$ y $V_2(\alpha-a,\beta)$, y los vértices secundarios son $V_3(\alpha,\beta+b)$ y $V_4(\alpha,\beta-b)$, como se observa en el dibujo



La elipse de ecuación $\frac{x^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$ tiene como vértices los puntos $V_1(0,6)$ y $V_2(0,-4)$ y, como covértices, los puntos $V_3(2,1)$ y $V_4(-2,1)$.

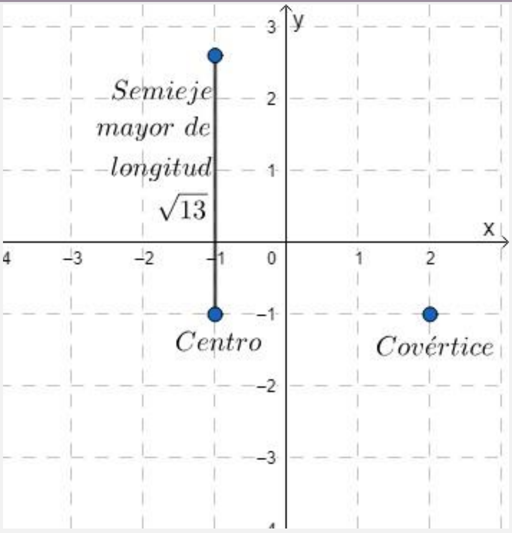
Con estos datos, deducimos que $C(0,1)$ es el centro; que el semieje mayor mide 5, es decir, $a=5$; y el semieje menor mide 2, por lo que $b=2$.

Si lo observamos gráficamente, es sencillo hallar los vértices, ya que solo nos estamos desplazando a unidades hacia arriba y hacia abajo del centro, y b unidades hacia la derecha e izquierda del centro, como se observa en la figura:



Hallar la ecuación canónica de la elipse con centro $(-1,-1)$, con longitud del semieje mayor $\sqrt{13}$ y en la cual el punto $(2,-1)$ es un covértice. Explicitar sus elementos principales y representar gráficamente.

En primer lugar, observemos que el centro de la elipse es el punto $(-1,-1)$ y como el punto $(2,-1)$ es un covértice, sabemos que la elipse será vertical.



Con los datos anteriores, sabemos que la ecuación será de la forma

$$\frac{\left(x-(-1)\right)^2}{b^2}+\frac{\left(y-(-1)\right)^2}{a^2}=1$$

Por otro lado, como el semieje mayor mide $\sqrt{13}$, sabemos que la constante a debe ser $\sqrt{13}$. Y, además, la distancia b será igual a la distancia entre el centro y el covértice dado, es decir, será igual a la distancia entre los puntos $(-1,-1)$ y $(2,-1)$. Por lo tanto, $b=3$.

Con estos datos podemos completar la ecuación canónica de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{13}\right)^2}=1.$$

Ahora, para dar los elementos principales, debemos dar las coordenadas del centro y de los cuatro vértices. Como ya conocemos el centro, podemos hallar los vértices sumando en las coordenadas adecuadas las constantes a y b.

Vértices principales:

$$V_1(-1,-1+a)=V_1\left(-1,-1+\sqrt{13}\right)$$
$$V_2(-1,-1-a)=V_2\left(-1,-1-\sqrt{13}\right)$$

Vértices secundarios:

$$V_3(-1+b,-1)=V_3(-1+3,-1)=V_3(2,-1)$$

(este es el covértice dado en el enunciado)

$$V_4(-1-b,-1)=V_4(-1-3,-1)=V_4(-4,-1)$$

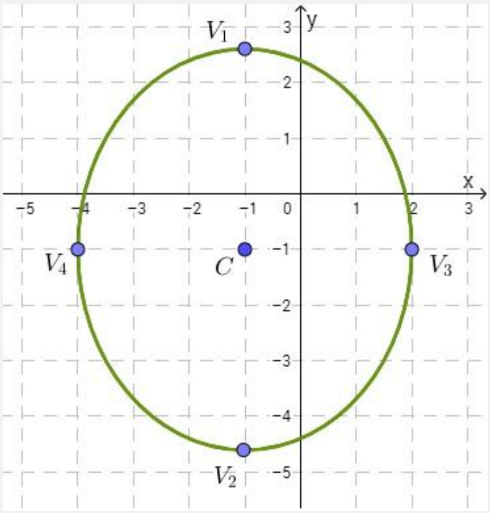
Por lo tanto, los elementos principales de la elipse son:

Centro: $C(-1,-1)$.

Vértices principales: $V_1\left(-1,-1+\sqrt{13}\right)$ y $V_2\left(-1,-1-\sqrt{13}\right)$.

Vértices secundarios $V_3(2,-1)$ y $V_4(-4,-1)$.

Finalmente, veamos una representación gráfica de la elipse hallada y los elementos principales:



Actividades

40. Encontrar la ecuación canónica de la elipse que tiene centro en $(3,-2)$, su eje mayor es vertical y mide 6 unidades y el punto $(5,-2)$ pertenece a la elipse.
41. Hallar la ecuación canónica de una elipse con centro en $(0,-3)$, con eje mayor de longitud 6 y eje menor de longitud 4. ¿Existe una única elipse que cumpla estas condiciones?
42. Hallar la ecuación de la elipse que tiene vértices principales $V_1(2,5)$ y $V_2(2,1)$ y vértices secundarios $V_3(3,3)$ y $V_4(1,3)$.

Cómo graficar una elipse

Para graficar una elipse de eje principal horizontal, nos ubicamos en el centro (α,β) y a partir de ahí nos movemos a unidades hacia la derecha y hacia la izquierda y marcamos esos dos puntos (que serán los vértices principales). Luego, desde el centro nos movemos b unidades hacia arriba y hacia abajo marcando los vértices secundarios. Por último, unimos esos puntos formando la elipse.

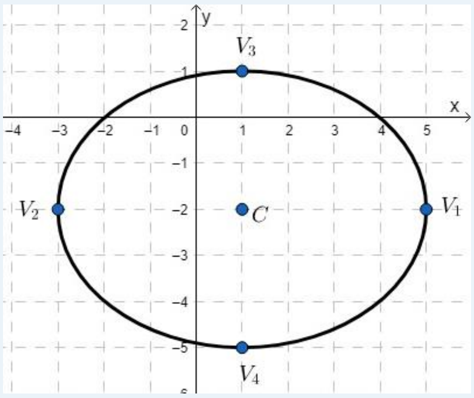
El procedimiento para graficar una elipse vertical es análogo al que se usa para graficar una elipse horizontal, solo que ahora nos moveremos a unidades hacia arriba y abajo, y b unidades hacia la derecha e izquierda del centro (α,β).

Queremos graficar la elipse de ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Primero, debemos reconocer que es una elipse de eje principal horizontal (ya que 16 es mayor que 9 y es el denominador del término en el que aparece x). En este caso, $a=4$ y $b=3$, y el centro es el punto $C(1,-2)$. Ubicamos, entonces, en un sistema de coordenadas al centro C y, desde ahí, nos movemos 4 unidades hacia la derecha marcando el vértice $(5,-2)$, que será el V_1 y 4 unidades hacia la izquierda marcando el vértice $(-3,-2)$, que será el V_2. También nos moveremos, desde C, 3 unidades hacia arriba marcando el covértice $(1,1)$, que será el V_3 y 3 unidades hacia abajo marcando el covértice $(1,-5)$, con lo que obtenemos V_4.

Por último, unimos los puntos formando la elipse:



Es conveniente que el gráfico de las elipses tenga la misma escala en ambos ejes, ya que, de no hacerlo, la gráfica se observará alterada es sus proporciones.

Actividades

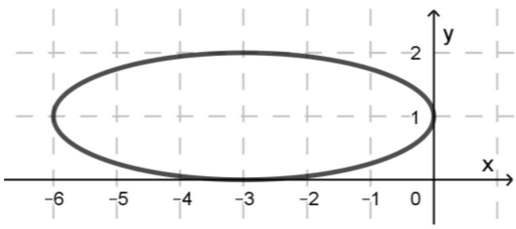
43.Graficar la elipse de ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

44.Hallar los elementos principales y graficar la elipse de ecuación

$$\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$$

45.Teniendo en cuenta los datos de la figura, encontrar la ecuación canónica de la elipse y determinar: centro, longitud de los semiejes, y coordenadas de los cuatro vértices.



Obtención de la ecuación canónica de la elipse

En algunos casos, podemos encontrar la ecuación de una elipse con sus cuadrados desarrollados. Si queremos graficar, encontrar su centro o las longitudes de sus ejes, será necesario que llevemos esa ecuación a la forma canónica completando cuadrados.

Hallar los elementos principales de la elipse de ecuación

$$9x^2 + 4y^2 - 54x + 8y + 49 = 0$$

Para comenzar, podemos agrupar los términos que involucran la variable x y los que tienen la variable y como sigue:

$$(9x^2 - 54x) + (4y^2 + 8y) + 49 = 0$$

En esos términos, podemos sacar como factor común el coeficiente que acompaña a las variables que están al cuadrado

$$9(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 2y) + 49 = 0$$

Ahora podemos completar cuadrados, sumando y restando 3^2 en el término que involucra a las x y 1^2 en el término que tiene a la variable y

$$9\left(\underbrace{x^2 - 6x + 3^2}_{(x-3)^2} - 3^2\right) + 4\left(\underbrace{y^2 + 2y + 1^2}_{(y+1)^2} - 1^2\right) + 49 = 0$$

La ecuación queda, entonces, de la forma

$$9[(x-3)^2 - 9] + 4[(y+1)^2 - 1] + 49 = 0$$

Si aplicamos la propiedad distributiva, obtenemos

$$9(x-3)^2 - 81 + 4(y+1)^2 - 4 + 49 = 0$$

donde podemos reducir la expresión realizando las sumas y las restas para obtener

$$9(x-3)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0$$

Si ahora sumamos 36 a ambos lados, nos queda

$$9(x-3)^2 + 4(y+1)^2 = 36$$

Finalmente, si dividimos a ambos miembros por 36, tenemos

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

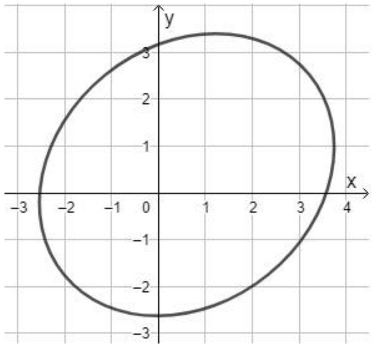
Por lo tanto, obtuvimos la ecuación canónica de la elipse. Ahora podemos dar sus elementos principales:

Centro: $C(3,-1)$

Vértices principales: $V_1(3{,}2)$ y $V_2(3,-4)$

Vértices secundarios: $V_3(1,-1)$ y $V_4(5,-1)$.

Si bien hemos presentado las elipses con eje horizontal o vertical, existen elipses con otros ejes, como se puede observar en el siguiente gráfico:



Sin embargo, no estudiaremos este tipo de elipses en este curso.

Actividades

46. Dadas las siguientes ecuaciones desarrolladas encontrar las ecuaciones canónicas de las elipses correspondientes, explicitar sus elementos principales y graficar:
    a) $16x^2 - 32x + 9y^2 + 36y - 92 = 0$
    b) $4x^2 + 9y^2 + 24x - 18y + 9 = 0$

Hipérbola

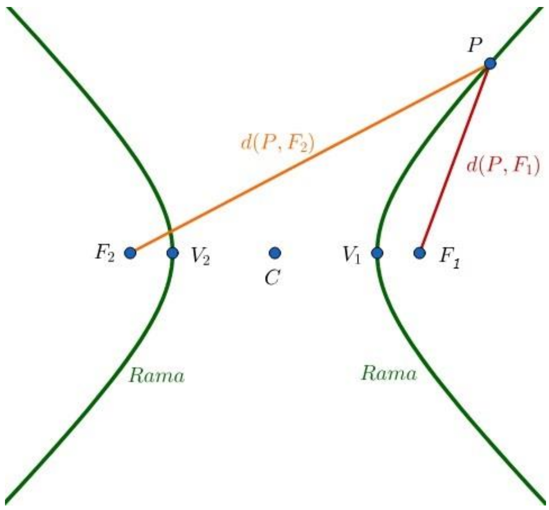
Una **hipérbola** es el conjunto de puntos de un plano que cumplen la condición de que la diferencia de las distancias desde cada uno de ellos a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es constante. Es decir, que un punto P está en la hipérbola si

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

o bien,

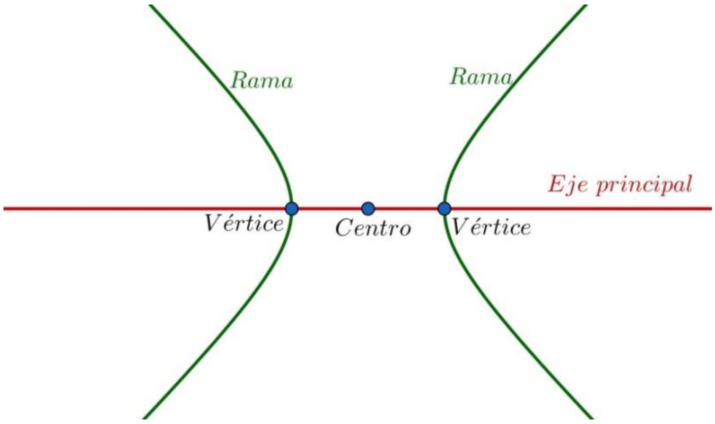
$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$$

donde $2a$ es una constante positiva.



Los elementos que permiten describir una hipérbola, y que llamaremos elementos principales son el **centro**, que es el punto medio del segmento que une los focos F_1 y F_2 y los **vértices**, que son los puntos de la hipérbola más cercanos a cada uno de los focos.

La hipérbola está formada por dos partes, que se llaman **ramas**.

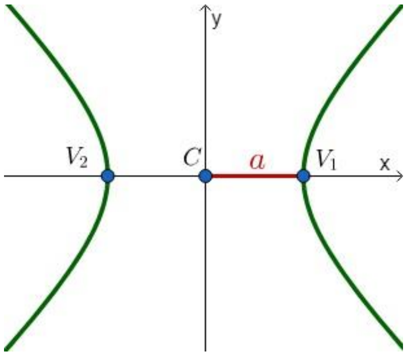


Al igual que con las elipses, la recta que pasa por los vértices se llama **eje principal** y la distancia entre los dos vértices es $2a$**.**

La ecuación más sencilla de la hipérbola es aquella en la cual el centro es el origen de coordenadas. En este caso, si el eje principal es horizontal, la ecuación canónica de la hipérbola centrada en $(0,0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

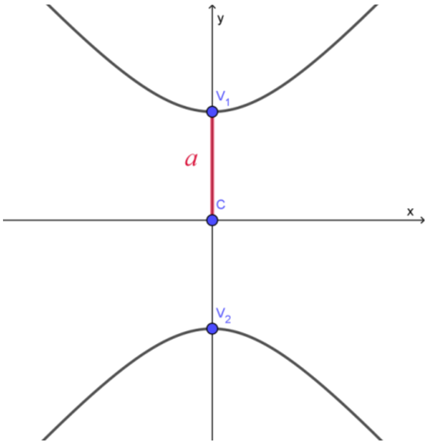
Ecuación canónica de la hipérbola con eje principal horizontal y centro en (0,0)



Si el eje principal es vertical, la ecuación canónica de la hipérbola centrada en $(0,0)$ es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la hipérbola con eje principal vertical y centro en (0,0)

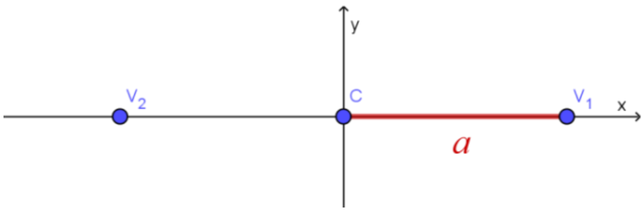


Notemos que, en el caso de las hipérbolas, la forma de reconocer si son de eje principal vertical u horizontal no son los valores de a y b, sino el término que posee el signo positivo en la ecuación canónica. En las hipérbolas puede ocurrir que a sea menor, mayor o igual que b.

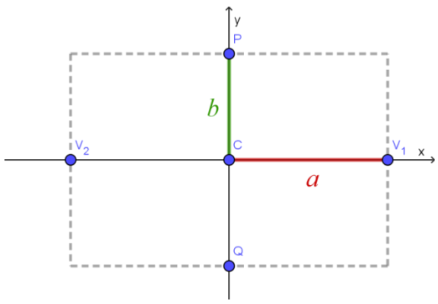
También se pueden estudiar hipérbolas con centro desplazado, pero no será considerado su análisis en este curso de Matemática Pi. En el anexo de este capítulo se detalla igualmente este tipo de cónicas.

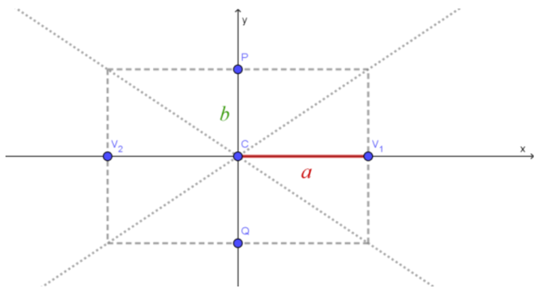
Cómo graficar una hipérbola centrada en $(0, 0)$

Para graficar una hipérbola de eje principal horizontal, nos ubicamos en el centro $(0,0)$ y, a partir de ahí, nos movemos a unidades hacia la derecha y hacia la izquierda y marcamos esos dos puntos (que serán los vértices).

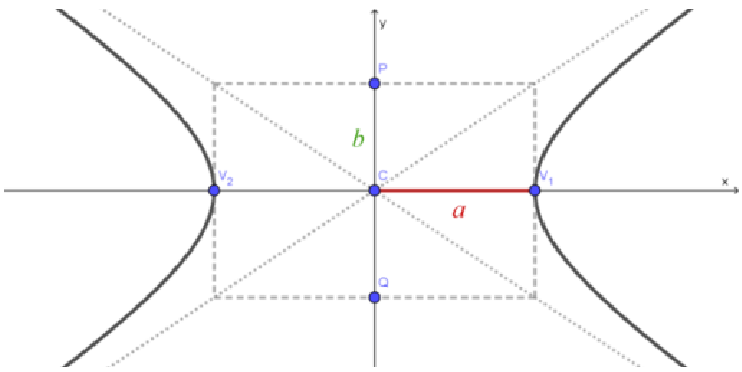


Luego, desde el centro nos movemos b unidades hacia arriba y hacia abajo y marcamos dos puntos auxiliares. Con los cuatro puntos marcados, formamos un rectángulo auxiliar y trazamos dos rectas que pasen por las diagonales del rectángulo.

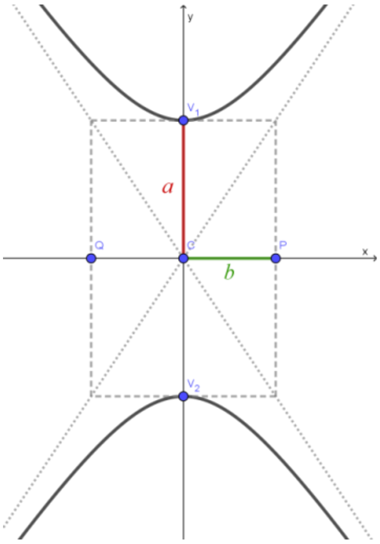




Finalmente, dibujamos las ramas de la hipérbola hacia la derecha y hacia la izquierda, pasando por los vértices y acercándose a las últimas rectas que dibujamos que son las asíntotas.



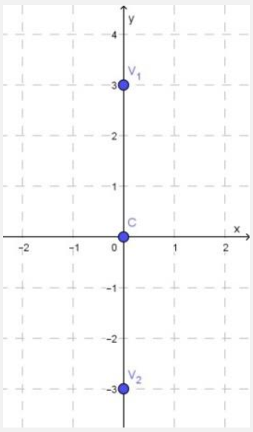
Si lo que queremos es graficar una hipérbola de eje principal vertical, nos ubicamos en el centro $(0,0)$ y, a partir de ahí, nos movemos a unidades hacia arriba y hacia abajo y marcamos esos dos puntos (que serán los vértices). Luego, desde el centro nos movemos b unidades hacia la derecha y hacia la izquierda y marcamos dos puntos auxiliares. Con los cuatro puntos marcados, formamos un rectángulo auxiliar y trazamos sus diagonales. Finalmente, dibujamos las ramas de la hipérbola abiertas hacia arriba y hacia abajo, pasando por los vértices y acercándose a las últimas rectas que dibujamos.

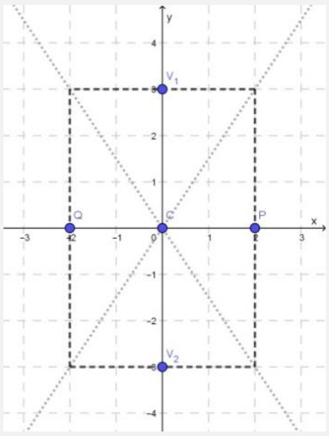


Graficar la hipérbola de ecuación

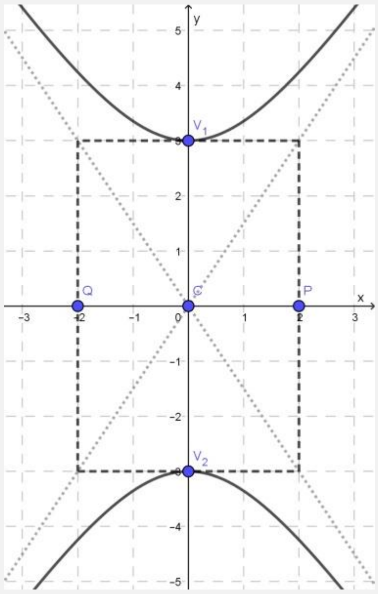
$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$$

En primer lugar, observemos que es una hipérbola con centro en $(0,0)$, y de eje principal vertical, ya que el signo positivo precede al término con y. Luego, los vértices serán los puntos $V_1(0,3)$ y $V_2(0,-3)$, pues surgen de sumar y restar 3 unidades a la coordenada y del centro (gráfico de la izquierda). Además, vamos a ubicar los dos puntos auxiliares $P(2,0)$ y $Q(-2,0)$, que surgen de sumar y restar 2 unidades en la coordenada x del centro y trazamos el rectángulo que queda determinado por estos puntos y los vértices, y las rectas que son diagonales del rectángulo (gráfico de la derecha).





Ahora, dibujando las ramas de la hipérbola que pasan por los vértices y que se acercan a las diagonales dibujadas, tenemos la gráfica de la hipérbola:

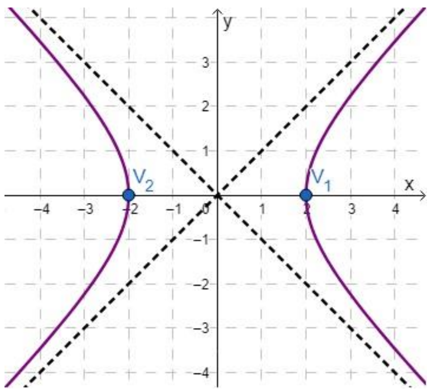


Actividades

47. Encontrar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en los puntos $V_1(0{,}3)$ y $V_2(0,-3)$ y constante $b = 4$. Representar gráficamente.
48. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(0{,}0)$, constante $b = 1$ y que pasa por el punto $(-2{,}0)$.
49. Hallar los elementos principales de la hipérbola de ecuación canónica

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$$

50. Encontrar la ecuación de una hipérbola con vértices en los puntos $V_1(3{,}0)$ y $V_2(-3{,}0)$. ¿Existe una única hipérbola que cumpla esto?
51. En la figura siguiente, se encuentra el gráfico de una hipérbola y de algunos de los elementos auxiliares que permitieron realizar su gráfico. Encontrar la ecuación canónica de la hipérbola y explicitar sus elementos principales.



Obtención de la ecuación canónica de la hipérbola centrada en el $(0,0)$

Al igual que ocurre con otras cónicas, no siempre tendremos a la hipérbola escrita en su ecuación canónica. Para poder obtener los sus elementos, y así poder graficarla, tendremos que llevar la ecuación a su forma canónica.

¿Cuáles son los vértices de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$? Graficar la hipérbola obtenida.

Si sumamos 36 a ambos miembros, obtenemos

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

Ahora, podemos dividir ambos miembros por 36 para obtener

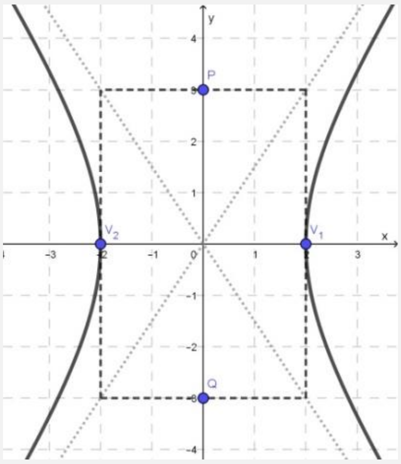
$$\frac{9x^2 - 4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

de donde obtenemos la ecuación

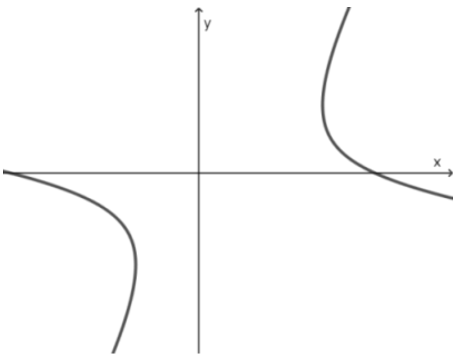
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

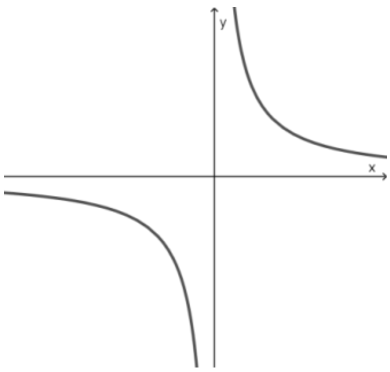
Por lo tanto, sabemos que tenemos una hipérbola de eje principal horizontal, y los vértices serán los puntos $V_1(2,0)$ y $V_2(-2,0)$, pues $a = 2$ y $b = 3$.

Finalmente, graficamos la hipérbola con los datos obtenidos



Si bien hemos presentado las hipérbolas con eje principal horizontal o vertical y centro $(0,0)$, existen hipérbolas con otros centros y otros ejes, como se puede observar en los siguientes gráficos





Sin embargo, no estudiaremos este tipo de hipérbolas en este curso, pero algunas se estudiarán en Matemática A.

Actividades

52. Encontrar la ecuación canónica de la hipérbola con ecuación

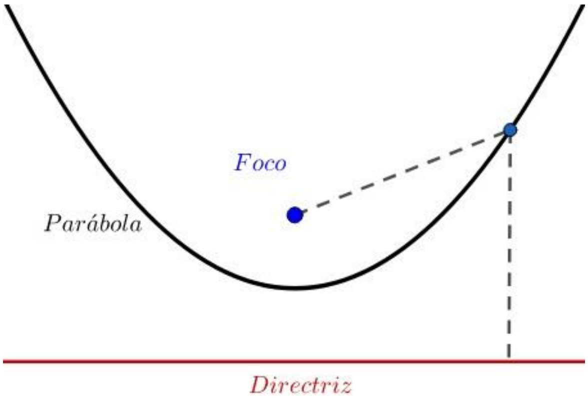
$$4y^2 - 6x^2 - 24 = 0$$

53. Realizar una gráfica de la hipérbola de ecuación

$$4x^2 - y^2 - 4 = 0$$

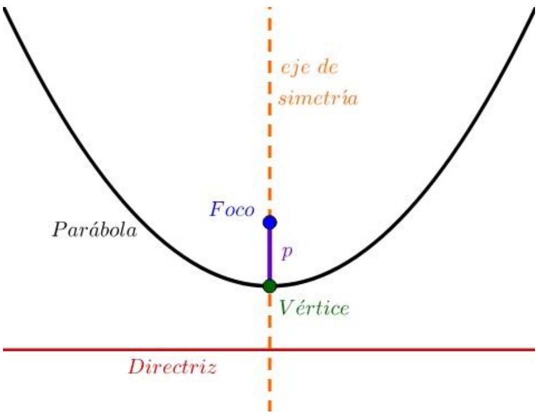
Parábola

Una **parábola** es la curva formada por todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de una recta dada, denominada **directriz**, y de un punto dado, llamado **foco**.



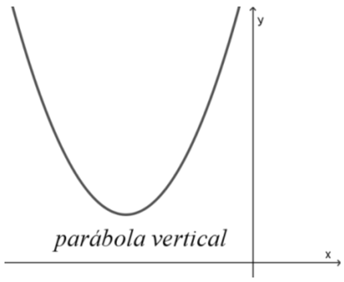
El **vértice** de la parábola es el punto de la parábola que está más cerca de la directriz. Designaremos con la letra p a un parámetro o constante que cumple que $|p|$ es igual a la distancia del vértice al foco (y, por lo tanto, es también la distancia del vértice a la directriz).

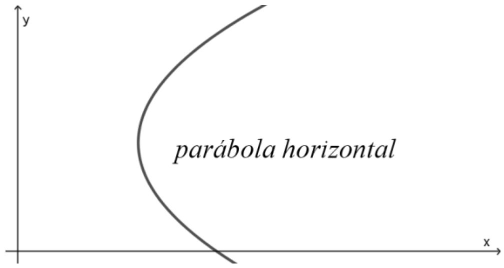
Además, una parábola posee un **eje focal**, también conocido como **eje de simetría**, que es la recta que pasa por el foco e interseca perpendicularmente a la directriz. Esta recta divide la parábola en dos partes, cuyos puntos opuestos son equidistantes entre sí, es decir, quedan simétricos.



El foco, el vértice, el parámetro p y el eje de simetría conforman los elementos principales de la parábola.

Las parábolas que tienen eje de simetría paralelo al eje y se llaman parábolas verticales, y las que tienen eje de simetría paralelo al eje x se llaman parábolas horizontales[3].



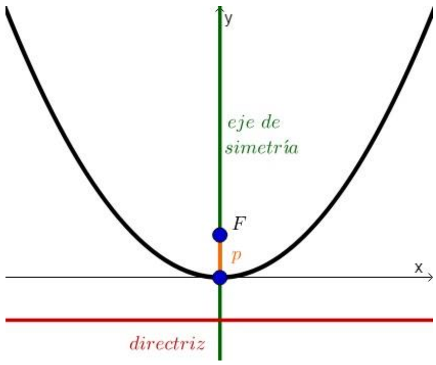


Parábola de eje vertical

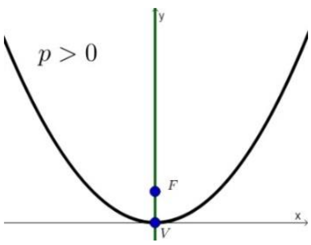
Primero, estudiaremos las parábolas verticales y con vértice en el origen. Si consideramos aquellos puntos que tienen igual distancia al foco $(0,p)$ y a la recta directriz $y=-p$, obtenemos la siguiente ecuación canónica

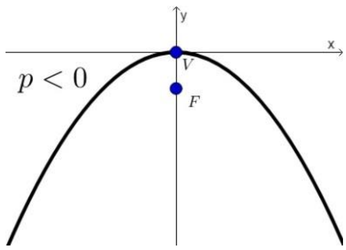
$$x^2 = 4py$$

Ecuación canónica de la parábola vertical y vértice en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$



- Si $p>0$, la parábola tiene su foco por encima del vértice.
- Si $p<0$, la parábola tiene su foco por debajo del vértice.





Hallar la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$ *y foco* $(0,3)$.

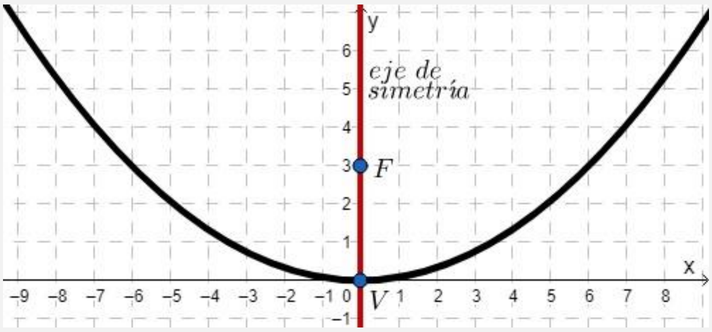
Lo primero que debemos hacer es situar en los ejes de coordenadas los datos. Marcamos, entonces, el vértice y el foco.

Como el eje de simetría debe contener al vértice y al foco, y ambos puntos están en el eje y*, la parábola es vertical. La distancia entre ambos puntos es* 3 *unidades*

[3] En forma abreviada se llaman parábolas verticales a aquellas parábolas que tienen eje de simetría vertical o paralelo al eje y. Del mismo modo, se llaman parábolas horizontales a aquellas que tienen eje de simetría paralelo al eje x.

y, como el foco está por encima del vértice, deducimos que $p = 3$. Entonces, la ecuación canónica de la parábola buscada es

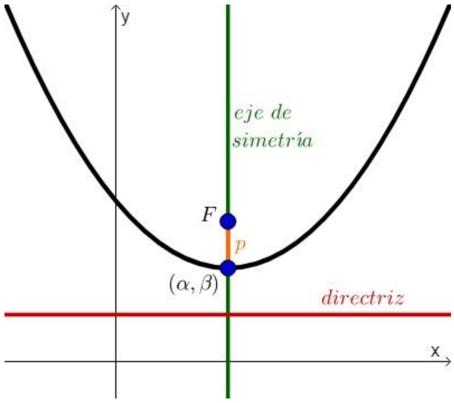
$$x^2 = 12y$$



Análogamente a lo que vimos para las demás cónicas, podemos trasladar el vértice de la parábola de la siguiente manera

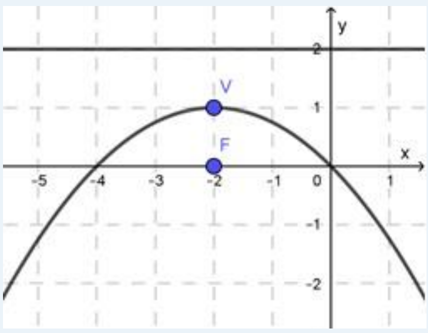
$$(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta)$$

Ecuación canónica de la parábola vertical y vértice en $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$



Supongamos que queremos hallar la ecuación de la parábola con vértice $(-2{,}1)$ y recta directriz $y = 2$.

Podemos dibujar, en un sistema de coordenadas, el vértice y la directriz, y notar que, como el eje de simetría es perpendicular a la recta directriz, el mismo debe ser vertical. Además, vemos que el foco debe estar por debajo del vértice a una distancia de 1 unidad (ya que es la misma distancia que del vértice a la directriz).



Tenemos, entonces, que $p = -1$ y la ecuación canónica que buscábamos nos queda

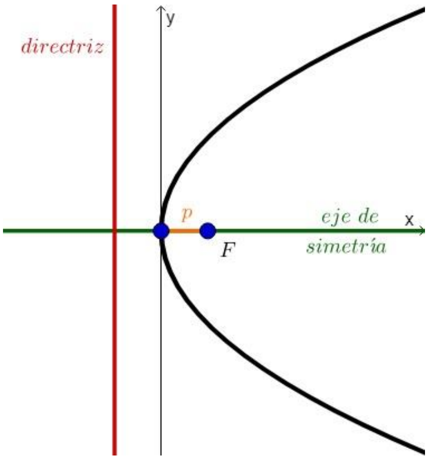
$$(x + 2)^2 = -4.(y - 1)$$

Parábola con eje horizontal

Veremos, primero, las parábolas horizontales con vértice en el origen. La ecuación canónica se obtiene de manera análoga a las parábolas verticales con vértice en el origen, igualando las distancias de un punto de la parábola al foco $(p, 0)$ y a la recta directriz $x = -p$. Tenemos, entonces, la siguiente ecuación

$$y^2 = 4px$$

Ecuación canónica de la parábola horizontal y vértice en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

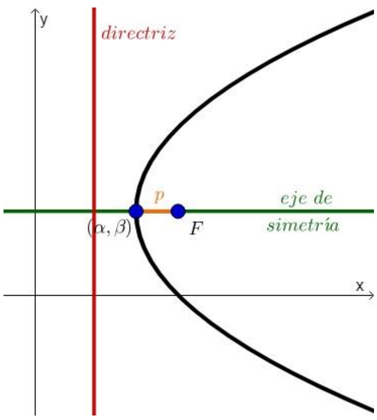


- Si $p > 0$, la parábola tiene su foco a la derecha del vértice.
- Si $p < 0$, la parábola tiene su foco a la izquierda del vértice.

Si trasladamos una parábola con eje de simetría horizontal de manera que el vértice sea (α, β), tenemos la siguiente ecuación

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha)$$

Ecuación canónica de la parábola horizontal y vértice en $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$



Actividades

54. Hallar los elementos de la parábola de ecuación

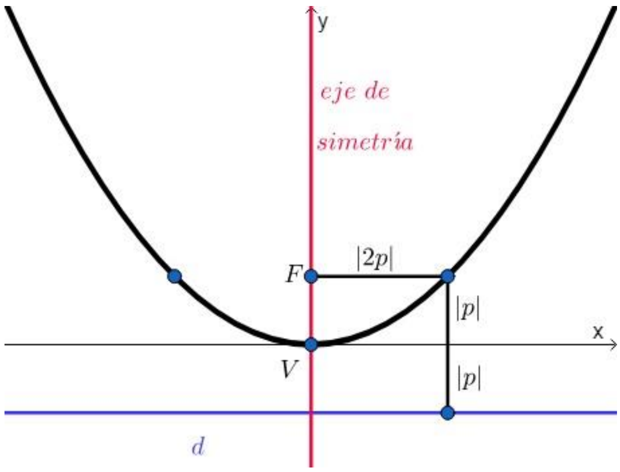
$$(x + 2)^2 = 12(y - 3)$$

55. Hallar la ecuación de la parábola con vértice $(-3, -2)$ y foco $F(-3, -7)$.
56. Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, de eje de simetría $y = 0$ y que pasa por el punto $(2, -4)$.
57. Escribir la ecuación canónica de una parábola con foco en $(-2,1)$ y parámetro $p = 3$. ¿Hay una única posibilidad como respuesta?

Cómo graficar una parábola

Para graficar una parábola, debemos reconocer, en primer lugar, si la parábola es vertical u horizontal. Esto se puede hacer observando si en la ecuación canónica el término que tiene potencia 2 es el que corresponde a las x (en cuyo caso la parábola será vertical) o el que corresponde a las y (y en ese caso tendremos una parábola horizontal).

En segundo lugar, notemos que si trazamos una recta paralela a la directriz pasando por el foco, la misma corta a la parábola en dos puntos. Esos puntos se encuentran a una distancia $|2p|$ de la directriz y, entonces, por la definición de la parábola deben encontrarse a distancia $|2p|$ del foco. Estos puntos nos ayudarán a graficar la parábola.



Ahora, ubicaremos el vértice de la parábola. Si la parábola es vertical, es decir, tiene ecuación de la forma

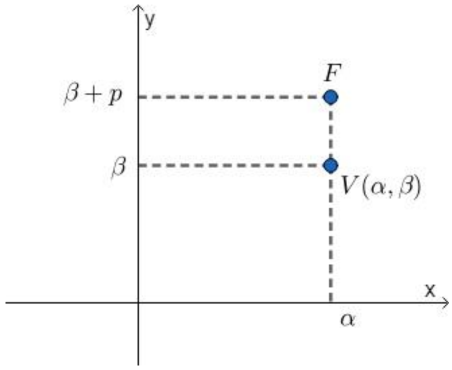
$$(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta)$$

entonces el vértice es (α, β).

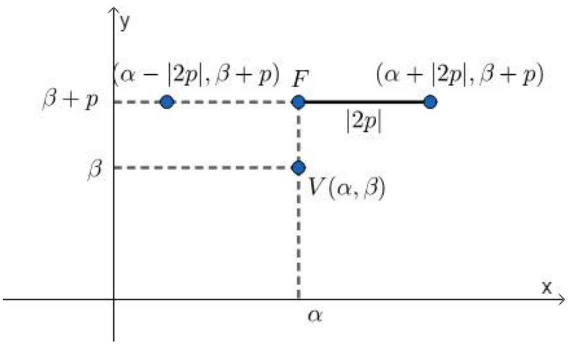
Una vez que tenemos el vértice, podemos graficar el foco y el eje se simetría. El foco será el punto $(\alpha, \beta + p)$ (es decir, el punto que surge de moverse $|p|$ unidades desde el vértice hacia arriba cuando tenemos $p > 0$ y hacia abajo cuando $p < 0$) y el eje de simetría será la recta de ecuación $x = \alpha$.

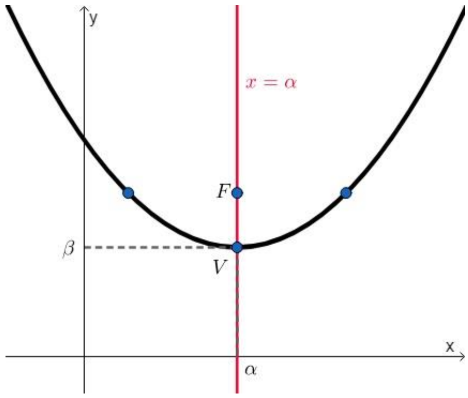
Notar que la parábola envuelve al foco, y que es simétrica con respecto al eje de simetría, es decir, si un punto pertenece a la parábola, debe haber uno del otro lado del eje de simetría con la misma ordenada (para parábolas verticales) o abscisa (en el caso de parábolas horizontales), y a la misma distancia de dicho eje.

La gráfica dependerá del signo de p. En este caso, ejemplificaremos con un valor de $p > 0$.



Ahora nos desplazamos $|2p|$ unidades hacia la derecha y $|2p|$ unidades hacia la izquierda, marcando, así, dos puntos que sabemos que pertenecen a la parábola. Ahora solo resta unir esos puntos con el vértice marcando, así, la parábola, como se ve en el siguiente gráfico.





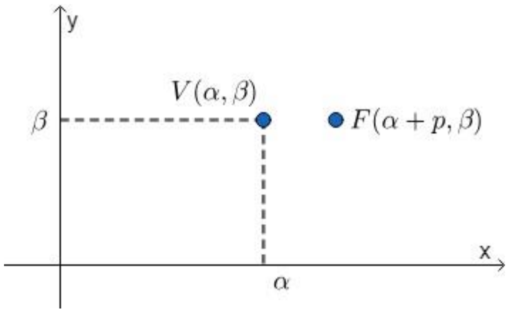
Si, por otro lado, tenemos una parábola horizontal dada por la ecuación

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha),$$

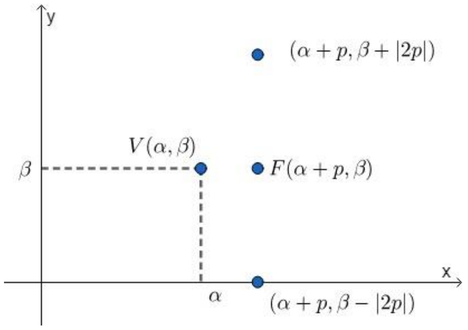
entonces debemos ubicar el vértice (α, β) en el plano coordenado.

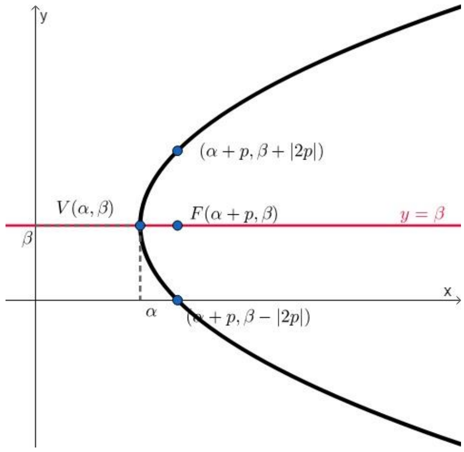
Una vez que tenemos el vértice, podemos graficar el foco y el eje de simetría. El foco será el punto $(\alpha + p, \beta)$ (es decir, nos movemos $|p|$ hacia la derecha cuando tenemos $p > 0$ y hacia la izquierda cuando $p < 0$) y el eje de simetría será la recta de ecuación $y = \beta$.

La gráfica dependerá del signo de p. En este caso, ejemplificaremos con un valor de $p > 0$.



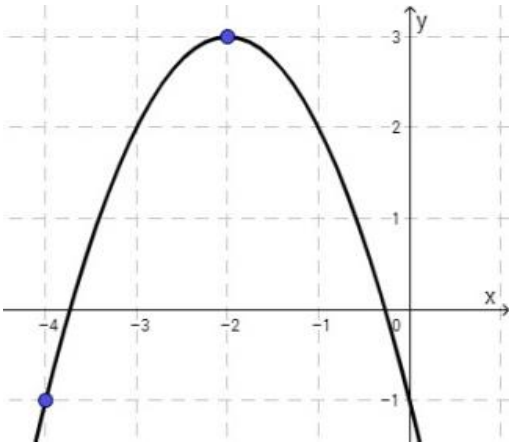
Ahora nos desplazamos $|2p|$ unidades hacia arriba y $|2p|$ unidades hacia abajo, marcando, así, dos puntos que sabemos que pertenecen a la parábola. Ahora solo resta unir esos puntos con el vértice marcando, así, la parábola, como puede verse en la siguiente figura.





Actividades

58. Graficar las parábolas dadas por las siguientes ecuaciones:
    a) $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$
    b) $(y - 3)^2 = -8x$
    c) $y^2 = 2(x + 1)$
    d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -6(y + 2)$
59. Teniendo en cuenta los datos de la figura, encontrar la ecuación canónica de la parábola, y determinar: vértice, coordenadas del foco, y ecuación del eje de simetría.



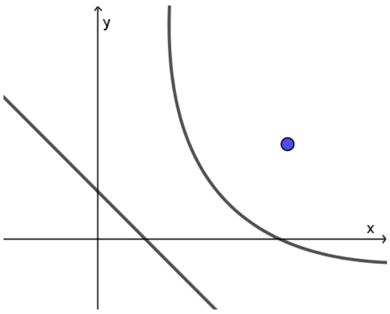
Obtención de la ecuación canónica de la parábola

En muchos casos, la ecuación de la parábola aparece desarrollada. Para poder identificar rápidamente sus elementos y graficarla, nos resultará útil llevar la ecuación a su forma canónica. Veremos en un ejemplo qué pasos hay que seguir para hacerlo.

Hallar la ecuación canónica de la parábola cuya ecuación desarrollada es $3y^2-12x+9y+4=0$	
$3y^2-12x+9y+4=0$	*Ecuación desarrollada.*
$3y^2+9y=12x-4$	*Separar en un miembro los términos de la variable que esté al cuadrado y los otros términos en el otro miembro.*
$y^2+3y=4x-\frac{4}{3}$	*Dividir ambos miembros por el número que haga falta para que el término cuadrático quede con coeficiente* 1.
$y^2+3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4x-\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$	*Sumar a ambos miembros el número que haga falta para completar cuadrados.*
$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4x+\frac{11}{12}$	*Operar.*
$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4\left(x+\frac{11}{48}\right)$	*Sacar factor común el coeficiente de la variable que no esté al cuadrado.*

Notemos en el ejemplo anterior que ahora es más sencillo reconocer que tenemos una parábola horizontal, con vértice en $\left(-\frac{11}{48},-\frac{3}{2}\right)$, con parámetro $p=1$, foco en el punto $\left(\frac{37}{48},-\frac{3}{2}\right)$ y eje de simetría $y=-\frac{3}{2}$.

En este material solo estudiaremos las parábolas cuyo eje de simetría es paralelo a alguno de los ejes coordenados. También existen parábolas con otros ejes, como la siguiente, aunque no las estudiaremos en este curso:



Actividades

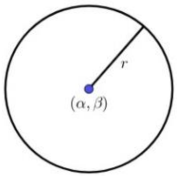
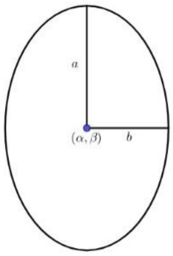
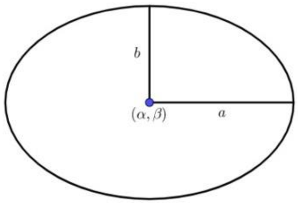
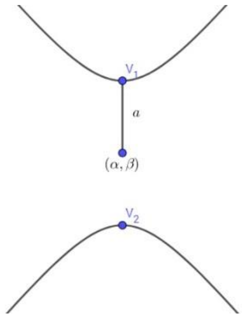
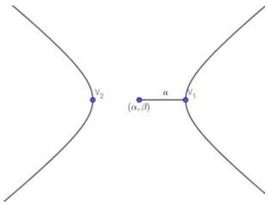
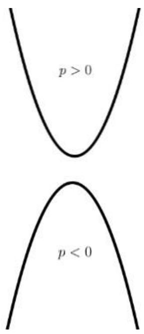
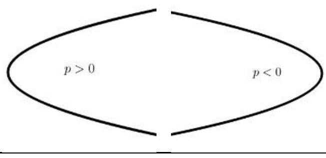
60. Dadas las siguientes ecuaciones desarrolladas hallar la ecuación canónica de las parábolas correspondientes, identificar sus elementos y representar gráficamente:

a) $y^2+8y-16x+64=0$

b) $x^2-6x-12y+21=0$

c) $x^2+4x+20y-96=0$

A continuación, resumimos en un cuadro lo estudiado sobre cónicas:

	Ecuación canónica	**Gráfica**	**Elementos principales**
Circunferencia	$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$		Centro Radio
Elipse con eje de simetría vertical	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$		Centro Longitud de semiejes (a y b) Vértices principales Vértices secundarios
Elipse de eje de simetría horizontal	$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$		
Hipérbola de eje principal vertical y centro$(\mathbf{0},\mathbf{0})$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$		Centro Vértices Constantes a y b
Hipérbola de eje principal horizontal y centro $(\mathbf{0},\mathbf{0})$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$		
Parábola vertical	$(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$		Vértice Parámetro Foco Eje de simetría
Parábola horizontal	$(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$		

Relacionar cada ecuación con la gráfica que le corresponde y justificar la elección.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ *b)* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ *c)* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

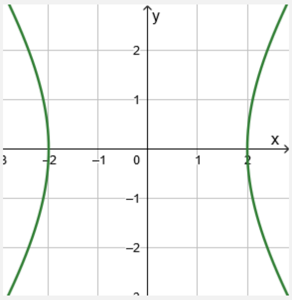


Figura 1

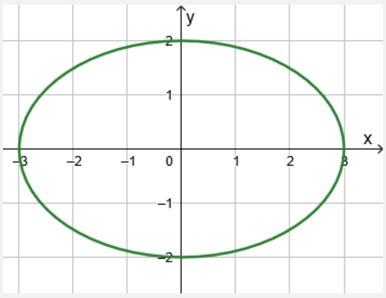


Figura 2

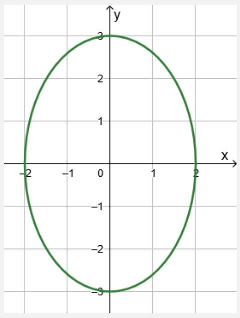


Figura 3

Lo primero que podemos observar es que las tres ecuaciones están escritas en forma canónica y que las tres cónicas están centradas en el $(0,0)$*, y que tanto la ecuación a) como la ecuación b) son ecuaciones de elipses, ya que en la ecuación dada, la variable* x *está elevada al cuadrado, y precedida por un signo positivo, al igual que la variable* y*. Además, las constantes que acompañan a ambas variables son diferentes. En cambio, en la ecuación c), los términos con* x^2 *e* y^2 *tienen signos diferentes, por lo que su gráfica será una hipérbola.*

En la ecuación a), tenemos que $a=3$ *y se ubica debajo de la variable* x *y* $b=2$ *y está debajo de* y*. Por lo tanto, es la ecuación de una elipse de eje principal horizontal y corresponde a la figura 2.*

En la ecuación b), podemos ver que a *nuevamente es* 3*, pero se encuentra debajo de la variable* y*, por lo que es la ecuación de una elipse de eje principal vertical. Tenemos, además, que* $b=2$*. Por lo tanto, es la figura 3.*

Por último, la ecuación c), es la ecuación de una hipérbola de eje principal horizontal, ya que el signo $+$ *está delante de la* x*, y por lo tanto* $a=2$ *y* $b=3$*. La figura que corresponde es la figura 1.*

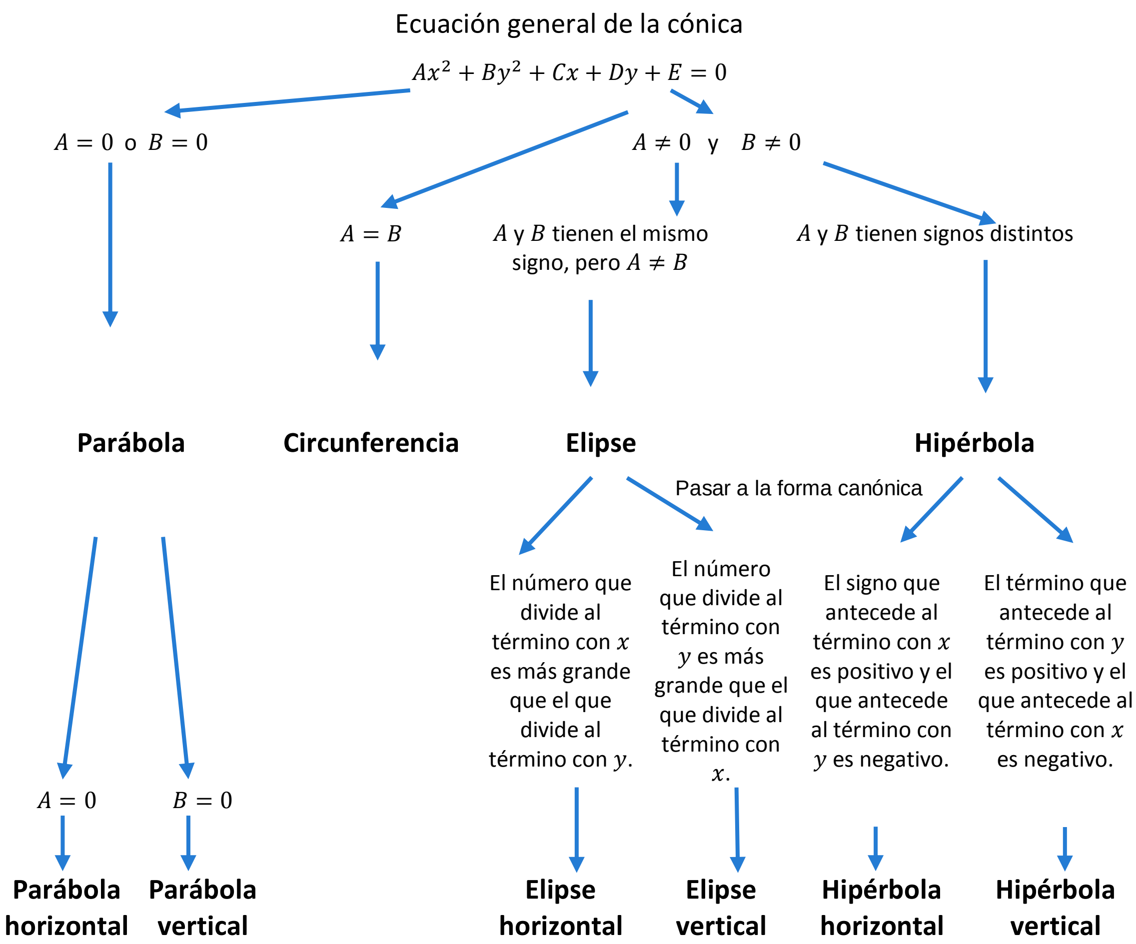
Forma general de las cónicas

La forma general de las cónicas estudiadas en esta materia es

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0,$$

para distintos números reales A, B, C, D y E. Esta forma se obtiene cuando desarrollamos las ecuaciones canónicas de las cónicas que estudiamos.

Existen algunos criterios que nos ayudarán a reconocer qué cónica está asociada a una ecuación dada en forma general. En el siguiente esquema mostramos un resumen de estos criterios:



> Si tenemos la ecuación $x^2 - 6x + 4y^2 + 5 = 0$, notemos que está dada en la forma general $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $A = 1$ y $B = 4$. Como tenemos que $A \neq B$ y que A y B tienen el mismo signo, sabemos que la ecuación corresponde a una elipse. Si llevamos a la forma canónica completando cuadrados, obtenemos:
>
> $$\frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1$$
>
> es decir es la ecuación de una elipse horizontal, ya que el número que divide al término con x es el 4, que es más grande que el número que divide al término con y (en este caso, es un 1).

Identificar a qué cónicas se corresponden las siguientes ecuaciones y justificar la elección:

$$2x^2 - 8x - 6y + 14 = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - 8 = 0$$

Tenemos que $A = 2$, y como no hay término con y^2, podemos deducir que $B = 0$, con lo que su representación gráfica es una parábola vertical.

Como $A = 3$ y $B = -4$, y tienen diferentes signos, podemos deducir que su representación gráfica es una hipérbola. Para poder reconocer si la hipérbola es vertical u horizontal, podemos llevar la ecuación a la forma canónica

$$\frac{x^2}{\frac{8}{3}} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Como el signo que antecede al coeficiente con x es positivo, sabemos que la ecuación corresponde a una hipérbola horizontal.

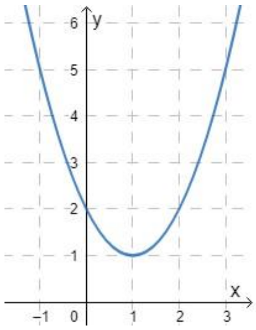
Actividades

61. A partir de las siguientes ecuaciones, determinar de qué tipo de cónica se trata, sus elementos principales, y hacer un gráfico aproximado señalando los elementos.
    a) $4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y - 11 = 0$
    b) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$
    c) $-4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$
    d) $x^2 - 4x - 8y + 4 = 0$
    e) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$
    f) $x^2 + 4y^2 = 100$
    g) $y^2 = 20x$
    h) $9x^2 - 36 = 4y^2$

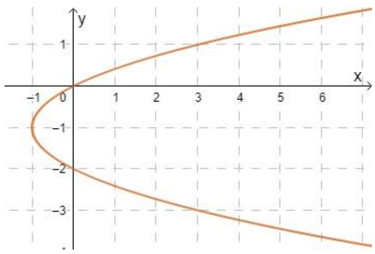
62. Relacionar cada ecuación con la gráfica que le corresponde. Justificar la elección.

a) $y - 1 = (x - 1)^2$ b) $x - 1 = (y - 1)^2$ c) $x + 1 = (y + 1)^2$

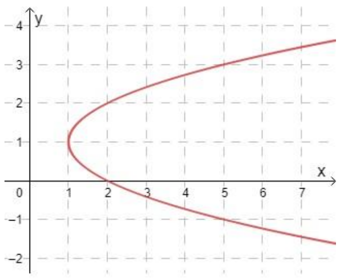
1



2



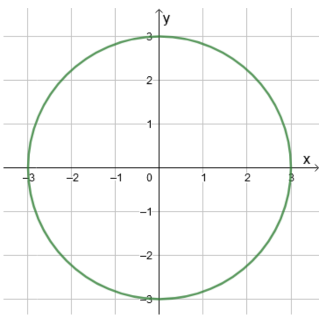
3



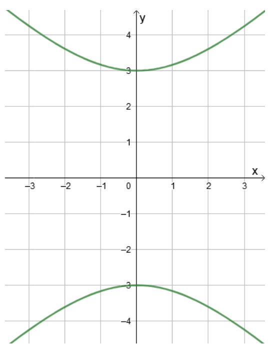
63. Relacionar cada ecuación con la gráfica que le corresponde. Justificar la elección.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ c) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

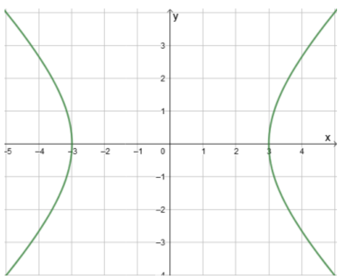
1



2



3



Sistemas de ecuaciones mixtos

Un sistema de ecuaciones es **mixto** si por lo menos una de las ecuaciones del sistema no es lineal. Las **soluciones** de estos sistemas de ecuaciones, al igual que en sistemas lineales, son aquellos valores que verifican o satisfacen todas las ecuaciones a la vez. Al conjunto conformado por todas las soluciones del sistema se lo llama **conjunto solución** del sistema.

Al igual que en los sistemas lineales, en algunos casos representaremos geométricamente las gráficas de las ecuaciones que componen al sistema. En este caso, las soluciones serán aquellos puntos del plano que pertenecen a todas las gráficas. Esta representación resultará útil para interpretar lo hallado analíticamente.

En esta materia estudiaremos sistemas mixtos que contengan ecuaciones lineales y no lineales cuya representación esté dada por rectas y cónicas.

Para resolver los sistemas mixtos se utilizarán los métodos ya vistos en los sistemas lineales, teniendo en consideración, en cada caso, el más adecuado, según las ecuaciones que componen al sistema. Veremos algunos ejemplos de distintas situaciones que muestren cómo aplicar convenientemente los diferentes métodos y qué consideración tener en cuenta.

En el caso en que una de las ecuaciones sea lineal y la otra cuadrática, se puede resolver el sistema por sustitución, pues de la ecuación lineal se puede despejar una de las incógnitas.

Para resolver el sistema $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 41 \\ x - y = 7 \end{cases}$ primero despejamos x de la ecuación lineal

$$x = y + 7$$

y, luego, sustituimos en la ecuación cuadrática

$$2(y + 7)^2 + y^2 = 41$$

Operando obtenemos

$$2(y^2 + 14y + 49) + y^2 = 41$$
$$3y^2 + 28y + 57 = 0$$

Ahora resolvemos por Bhaskara la ecuación anterior y obtenemos dos valores:

$$y_1 = -3; \qquad y_2 = -\frac{19}{3}$$

Reemplazamos ahora en $x = y + 7$, obteniendo:

Para $y_1 = -3; x_1 = -3 + 7 = 4$, es decir $(4, -3)$ es solución.

Para $y_2 = -\frac{19}{3}; x_2 = -\frac{19}{3} + 7 = \frac{2}{3}$, de donde $\left(\frac{2}{3}, -\frac{19}{3}\right)$ también es solución del sistema. Entonces, el conjunto solución es

$$S = \left\{(4, -3); \left(\frac{2}{3}, -\frac{19}{3}\right)\right\}$$

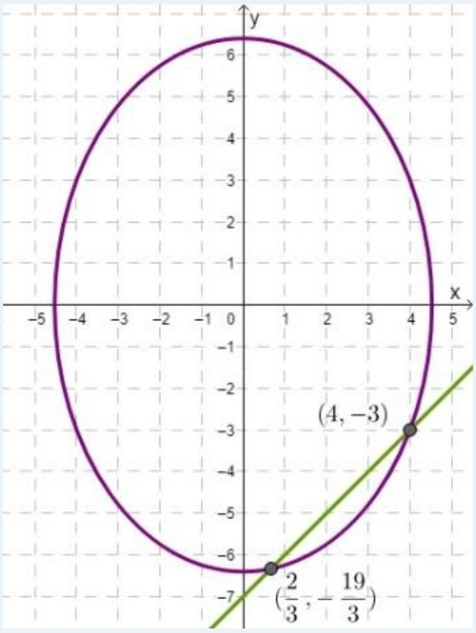
Comprobamos la primera solución

$$\begin{cases} 2(4)^2 + (-3)^2 = 32 + 9 = 41 \\ 4 - (-3) = 4 + 3 = 7 \end{cases}$$

Comprobamos la segunda solución

$$\begin{cases} 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{19}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{361}{9} = \frac{369}{9} = 41 \\ \frac{2}{3} - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{19}{3} = \frac{21}{3} = 7 \end{cases}$$

Representando geométricamente las ecuaciones del sistema, podemos verificar gráficamente que las soluciones halladas son los dos puntos de intersección entre la recta y la elipse.



En el caso en que ambas ecuaciones sean cuadráticas, se puede resolver el sistema por sustitución o, según sea el caso, con sumas y restas.

Si queremos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 & (1) \\ 3y^2 + 4x = -x^2 & (2) \end{cases}$$

En este caso, se puede resolver eliminando y^2 como primer paso. Para ello, multiplicamos por 3 la ecuación (1) y por 2 la ecuación (2), para que se igualen los coeficientes de y^2

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 33 \\ 6y^2 + 8x = -2x^2 \end{cases}$$

Ahora, restamos ambas ecuaciones, obteniendo

$$3x^2 - 8x = 33 + 2x^2$$

Operando obtenemos $x^2 - 8x - 33 = 0$.

Resolvemos esta ecuación y obtenemos dos valores para x

$$x_1 = -3; \qquad x_2 = 11$$

De la primera ecuación

$$y^2 = \frac{11 - x^2}{2}$$

Para $x_1 = -3$; $y^2 = \frac{11-3^2}{2} = 1$. Luego y toma los valores 1 o -1. Es decir, obtenemos los pares $(-3,1)$ y $(-3,-1)$.

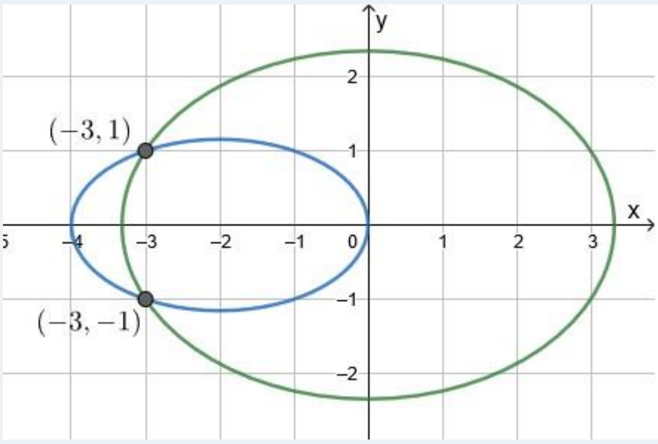
Para $x_2 = 11$, $y^2 = \frac{11-11^2}{2} = -55$, lo cual es un absurdo.

Es decir, el sistema solo tiene 2 soluciones, y el conjunto solución es

$$S = \{(-3,1), (-3,-1)\}.$$

Ahora interpretaremos gráficamente la solución. La ecuación (1) representa la elipse de ecuación $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{\frac{11}{2}}=1$, que tiene eje principal horizontal, está centrada en el origen, $a=\sqrt{11}$ y $b=\sqrt{\frac{11}{2}}$. Si en la ecuación (2) completamos cuadrados, tenemos $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$, vemos que es la ecuación de otra elipse de eje principal horizontal, con centro en $(-2{,}0)$, $a=2$ y $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hacemos un gráfico de las mismas, y marcamos las dos soluciones halladas.



Este ejemplo también se puede resolver por sustitución y queda sencilla su resolución. Se debe despejar y^2 de la ecuación (1) y sustituirla en la ecuación (2). Luego, continuar a partir de esa sustitución.

Es importante observar que si despejamos la variable x de grado 1 en la ecuación (2), no podríamos haber resuelto la ecuación.

Encontrar los puntos de intersección entre la hipérbola de ecuación $x^2-y^2=4$ y la parábola de ecuación $x^2=2(y+2)$.

Como encontrar los puntos de intersección entre dos cónicas consiste en resolver el sistema de ecuaciones mixto, podemos observar que en ambas ecuaciones tenemos el término x^2. Podemos, entonces, despejar x^2 en ambas y nos queda:

$$\begin{cases} x^2=4+y^2 & (1) \\ x^2=2(y+2) & (2) \end{cases}$$

Si igualamos las ecuaciones (1) y (2), obtenemos la ecuación

$$4+y^2=2y+4$$

de donde, por Bhaskara tenemos que $y=0$ o $y=2$.

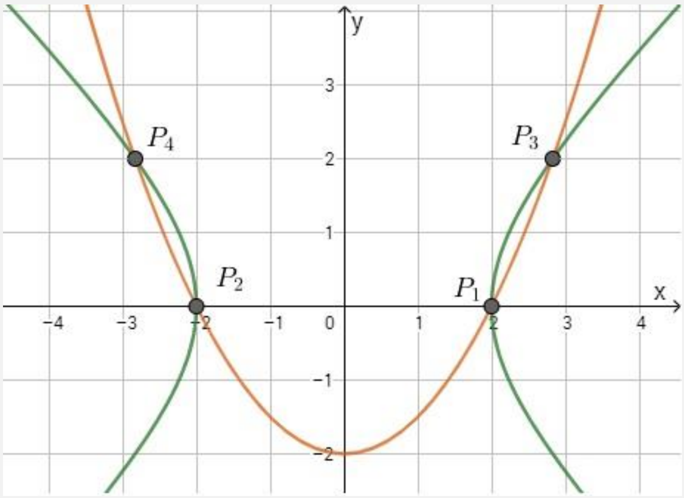
Si $y=0$ de la ecuación (1) obtenemos que $x^2=4$, es decir, que $x=2$ o $x=-2$. Tenemos, entonces, que los puntos $P_1(2{,}0)$ y $P_2(-2{,}0)$ son soluciones del sistema.

Si $y=2$, nuevamente reemplazando en la ecuación (1), obtenemos que $x^2=8$, por lo que los puntos $P_3(2\sqrt{2},2)$ y $P_4(-2\sqrt{2},2)$ también son soluciones del sistema.

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \{(2,0), (-2,0), (2\sqrt{2}, 2), (-2\sqrt{2}, 2)\}.$$

Si graficamos ambas cónicas en un mismo plano cartesiano, podemos marcar las cuatro soluciones halladas

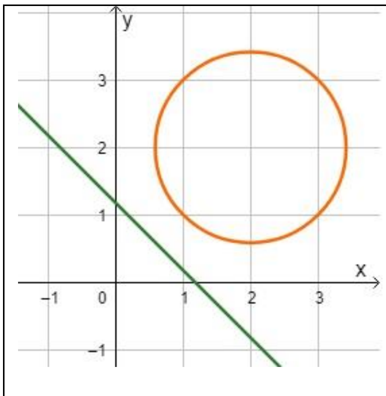
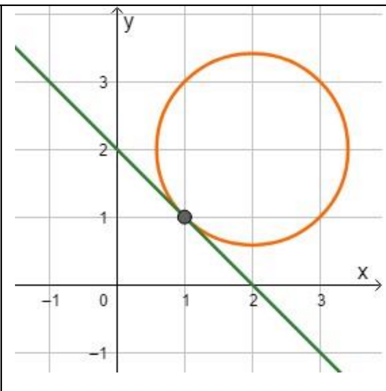
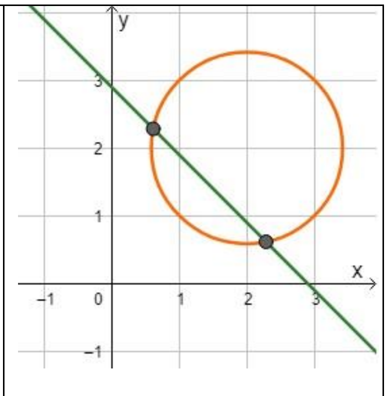


Interpretación geométrica

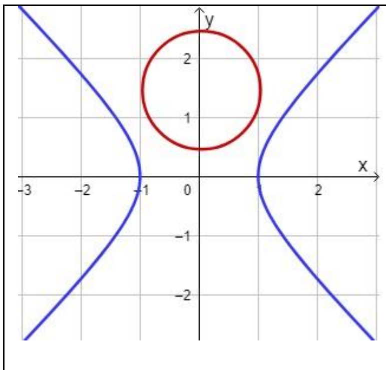
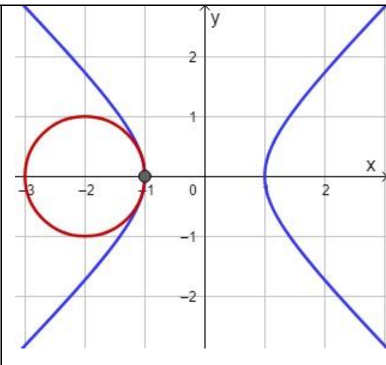
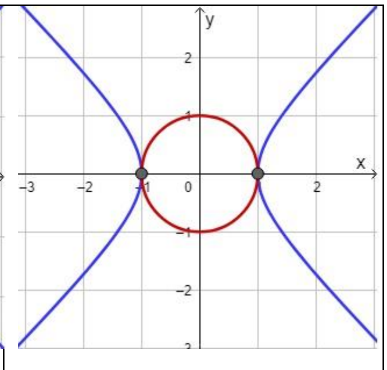
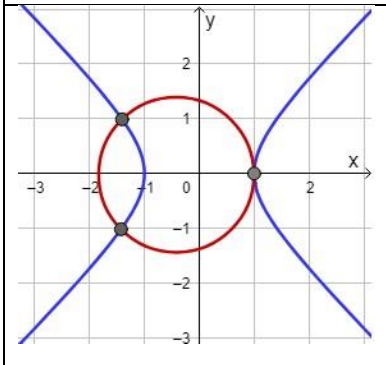
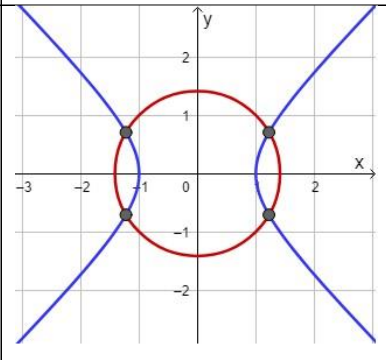
Antes de resolver un sistema de ecuaciones mixto, es recomendable reconocer el tipo de ecuaciones que intervienen en el mismo y tratar de representar una gráfica de la situación, para interpretar la cantidad de soluciones que debería hallar al resolver el sistema.

Algunas de las posibles variantes son:

- Recta con cónica (por ejemplo, con una circunferencia): 0, 1 o 2 soluciones.

		
Sin solución	1 solución	2 soluciones

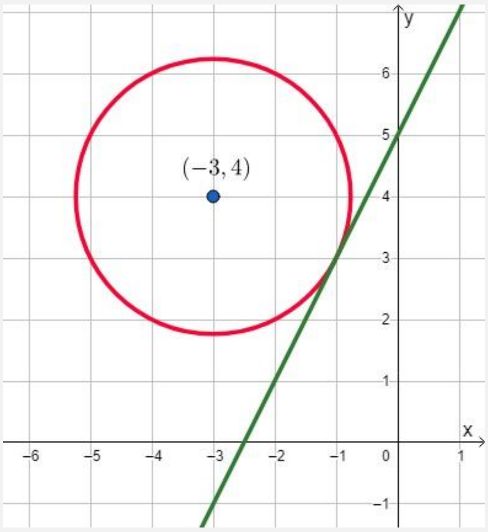
- Dos cónicas (por ejemplo circunferencia con hipérbola): $0, 1, 2, 3$ o 4 soluciones

		
Sin solución	1 solución	2 soluciones
		
3 soluciones	4 soluciones	

Dada la recta de ecuación $y = 2x + 5$

a) Encontrar el radio de una circunferencia con centro $C(-3{,}4)$, *de modo que tenga un único punto en común con la recta. Hallar el punto de intersección y hacer un gráfico aproximado.*

En primer lugar, podemos plantear gráficamente la situación, para comprender geométricamente qué debemos hacer.



Lo que debemos hallar es el radio de la circunferencia con centro $C(-3{,}4)$, *es decir, el valor* r *de la siguiente ecuación*

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

tal que la recta y la circunferencia tengan un solo punto en común.

El punto de intersección de la circunferencia y la recta será un punto que cumplirá simultáneamente las ecuaciones de la circunferencia y la recta, por lo que será solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-4)^2 = r^2 & (1) \\ y = 2x + 5 & (2) \end{cases}$$

Si reemplazamos la ecuación (2), *en la ecuación* (1) *obtenemos la ecuación*

$$(x+3)^2 + (2x+5-4)^2 = r^2$$

es decir,

$$(x+3)^2 + (2x+1)^2 = r^2$$

la cual, desarrollando los cuadrados, nos queda

$$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 + 4x + 1 = r^2$$

y, agrupando los términos, obtenemos

$$5x^2 + 10x + 10 - r^2 = 0$$

Es decir, tenemos una ecuación cuadrática con $a = 5$, $b = 10$ *y* $c = 10 - r^2$. *Si queremos que esta ecuación tenga una única solución, debemos hallar un valor de* r *para que el discriminante valga cero, es decir,*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4.5.(10 - r^2) = 0$$

Si operamos en esta ecuación con incógnita r, *obtenemos*

$$100 - 200 + 20r^2 = 0$$

Es decir,

$$20r^2 = 100$$

de lo cual podemos deducir que

$$r^2 = 5$$

cuyas soluciones son $r = \sqrt{5}$ *y* $r = -\sqrt{5}$.

Pero r *es la longitud del radio, que debe ser positiva. Por lo tanto, el valor del radio de la circunferencia para el cual la intersección con la recta tiene un único punto es*

$$r = \sqrt{5}.$$

Si queremos hallar el punto de intersección, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 & (1) \\ y = 2x + 5 & (2) \end{cases}$$

Para esto reemplazamos (2) *en* (1) *y obtenemos*

$$(x+3)^2 + (2x+5-4)^2 = 5$$

Desarrollando e igualando a 0 *como antes tenemos la ecuación cuadrática*

$$5x^2 + 10x + 5 = 0$$

La cual podemos resolver aplicando la fórmula de Bhaskara o por otros métodos que hemos estudiado. En este caso, si dividimos ambos términos por 5, *obtenemos la ecuación*

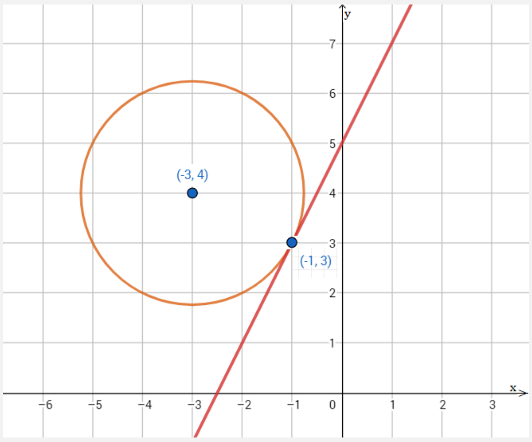
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Que es el desarrollo de $(x+1)^2$, *es decir, que la única solución es* $x = -1$.

Para hallar ahora el valor de y, *podemos reemplazar* $x = -1$ *en la ecuación (2) y obtenemos*

$$y = 2(-1) + 5 = 3$$

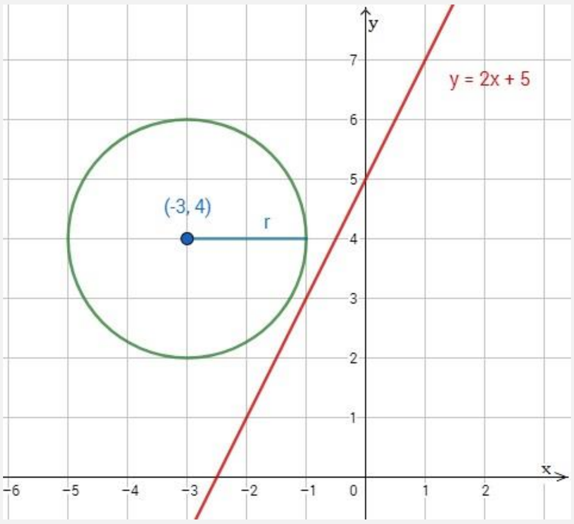
Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{(-1,3)\}$.



b) Encontrar el radio de una circunferencia con el mismo centro que en el inciso a), de modo que no tenga puntos en común con la recta de ecuación $y = 2x + 5$.

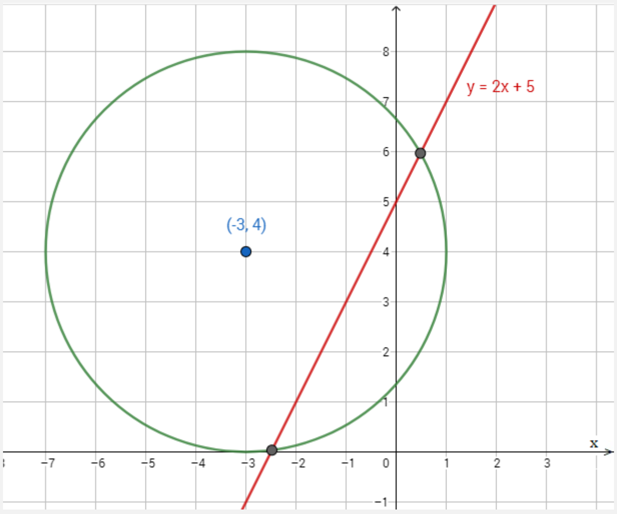
Ya vimos en el inciso anterior que si $r = \sqrt{5}$, *la circunferencia y la recta se intersecan en un solo punto. Si ahora reducimos el radio a un valor que esté entre*

0 y $\sqrt{5}$, vamos a obtener que la recta no interseca a la circunferencia. Por ejemplo, podemos tomar el valor $r = 2$.

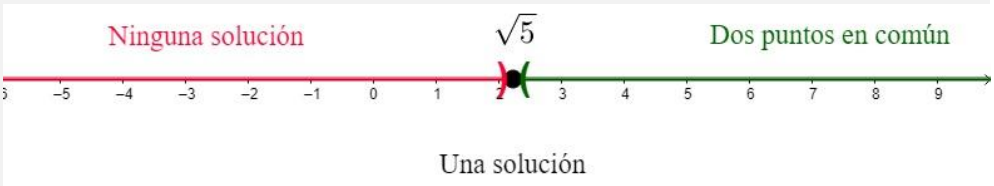


c) Encontrar el radio de una circunferencia con el mismo centro que en los incisos anteriores, de modo que tenga dos puntos en común con la recta de ecuación $y = 2x + 5$.

Por lo mismo que lo visto en los anteriores incisos, podemos tomar cualquier valor de $r > \sqrt{5}$, obteniendo que la recta corta a la circunferencia en dos puntos. Por ejemplo, tomemos $r = 4$.



Si representamos en la recta real los distintos valores de r según los tres casos a), b) y c), tenemos:



Actividades

64. Dada la cónica de ecuación $2x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$
    a) Determinar que cónica representa y hallar sus elementos.
    b) Hallar analíticamente la intersección de la cónica dada con la recta de ecuación $x + y = 0$.
    c) Graficar la cónica con sus elementos, la recta y señalar la intersección entre ambas.
65. Encontrar el radio de una circunferencia con centro $(3, -4)$, de modo que tenga un único punto en común con la recta de ecuación $y = 2x - 5$. Hallar el punto de intersección y hacer un esquema gráfico.
66. Dada la ecuación $x^2 - 2x + y^2 = 6$, determinar qué cónica representa, dar sus elementos y realizar una gráfica aproximada.
67.
    a) Encontrar analíticamente los puntos de intersección entre la circunferencia de ecuación $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ y la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$. Graficar.
    b) Hallar la ecuación de una parábola que tenga el mismo vértice que la parábola del inciso anterior, pero que solo tenga un punto en común con la circunferencia. Justificar gráficamente.
68. Dado el sistema $\begin{cases} y = (x - 4)^2 - 2 \\ y - 2x = k \end{cases}$
    a) Hallar el valor de k para que el sistema tenga solución única.
    b) Para el valor de k hallado, encontrar el conjunto solución.
    c) Para dicho valor de k, representar gráficamente ambas ecuaciones en un mismo sistema coordenado y marcar los puntos de intersección hallados.
    d) Encontrar un valor de k para que el sistema tenga dos soluciones. Justificar gráfica o analíticamente.
69. Encontrar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
70. Determinar las pendientes de las rectas de ecuación $y = mx$ para que tengan un solo punto de intersección con la parábola de ecuación $y = -x^2 - 1$. Para cada valor de m hallado, ¿cuál es el punto de intersección? Hacer un gráfico aproximado.
71.
    a) Escribir la ecuación de la circunferencia con centro en $C(0,4)$ y radio 2.
    b) Hallar analíticamente los puntos de intersección entre la circunferencia de la parte a) y la parábola de ecuación $x^2 + 2y - 12 = 0$.
    c) Graficar las curvas correspondientes a cada ecuación y, en el caso de que los hubiese, marcar el o los puntos hallados en b).
    d) Cambiar la ecuación de la circunferencia modificando solo el valor del radio, de modo que la parábola y la circunferencia no tengan puntos de intersección. Justificar gráfica o analíticamente.

72. Calcular cuántos metros de alambre se necesitarán para bordear un terreno de forma triangular, sabiendo que dicho triangulo es isósceles, que la altura del triángulo mide 3 metros menos que cada uno de los lados iguales, y que la base mide 3 metros más que los lados iguales.
73. Hoy, un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo, pero hace 6 años la suma de la edad del padre más el cuadrado de la edad del hijo era 30. ¿Cuál fue la edad del padre cuando nació su hijo?
74. El volumen de una caja sin tapa rectangular de $20\ cm$ de altura es de $12000\ cm^3$. Si la base es tal que uno de sus lados es $10\ cm$ mayor que el otro, ¿Cuántos m^2 de cartón se utilizaron para construirla?
75. En una empresa trabajan 10 empleados divididos en dos oficinas, A y B. Si de la oficina B pasan dos empleados para la otra, la suma de los cuadrados de la cantidad de personas en las oficinas resulta cinco veces la cantidad original de A, más 35. ¿Cuántos empleados había originalmente en cada oficina?

Actividades de repaso del Capítulo 3

1. Encontrar la ecuación canónica de la hipérbola y explicitar las coordenadas de sus vértices
$$x^2 - 2y^2 + 8 = 0$$
2.
   a) Determinar qué cónica representa la ecuación $x^2 + 3x + y^2 + 4y = 0$. Escribir su ecuación canónica, obtener sus elementos y graficar.
   b) Determinar la ecuación de la recta que contiene al origen y al centro de la cónica del inciso anterior.
3.
   a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita hallar los valores de m y b, tales que $(x_1, y_1) = (2, 1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 3)$ sean soluciones de la ecuación
   $$y = mx + b.$$
   b) Utilizando la ecuación punto-pendiente de la recta, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(1, 3)$. Comparar con el resultado obtenido en el ítem anterior.
4. Encontrar el punto $P(x, y)$ donde la recta de ecuación $y = 2x + 1$ se interseca con la recta que pasa por los puntos $Q(1, 1)$ y $R(2, 5)$. Graficar.
5. Dada la cónica de ecuación $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y = 0$.
   a) Determinar qué cónica representa y hallar sus elementos.
   b) Hallar analíticamente la intersección con la recta de ecuación $x + y = 0$.
   c) Graficar la cónica con sus elementos, la recta y señalar la intersección.
6. Determinar la ordenada al origen de la recta de ecuación $y = x + b$ para que tenga un único punto de intersección con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Interpretar gráficamente la situación.
7. Determinar un número de tres cifras tal que la suma de las tres cifras sea 20, el cuadrado de la segunda cifra sea igual a la suma de las otras dos y la diferencia entre el número y el que se obtiene invirtiendo las cifras sea 198.
8. Un rectángulo tiene un área de $15\ cm^2$. Si la altura pasa a ser $4\ cm$ más que el 80% de su valor original (mientras que la base no se altera), el área pasa a valer $6\ cm^2$ menos que el doble del área original. ¿Cuál era el valor original del perímetro?
9. Determinar el valor de k para que el sistema
$$\begin{cases} y + 6 = k^2 x \\ x = \dfrac{y - 2k}{9} \end{cases}$$
   tenga
   a) única solución.
   b) infinitas soluciones.
   c) ninguna solución.

10.Relacionar las siguientes ecuaciones con su gráfica. Justificar.

a) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 72y = -144$

b) $x^2 - y^2 = 9$

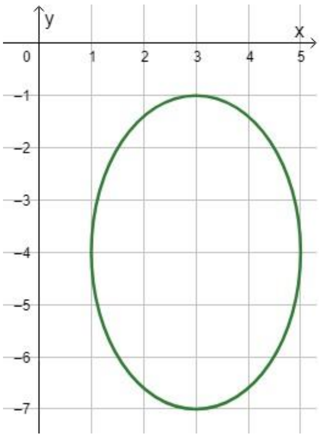
c) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 32y = -109$

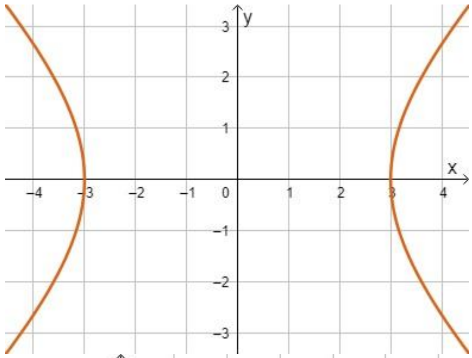
d) $x^2 - y^2 = -9$

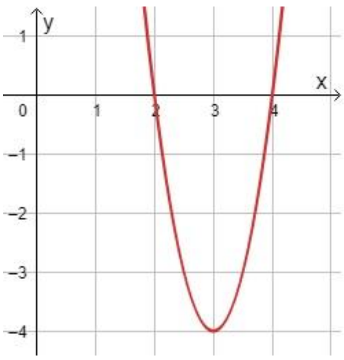
e) $x - 9y^2 - 72y = 147$

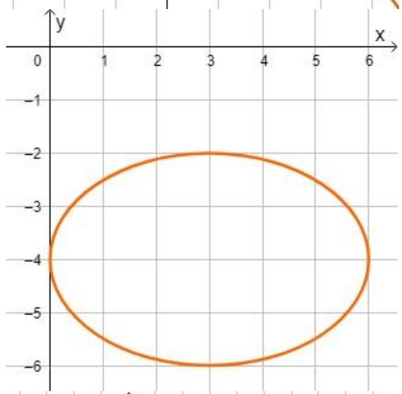
f) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 11$

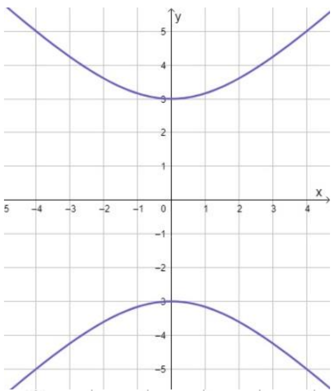
g) $4x^2 - 24x - y = -32$

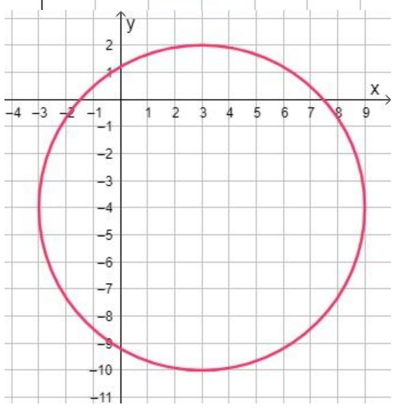


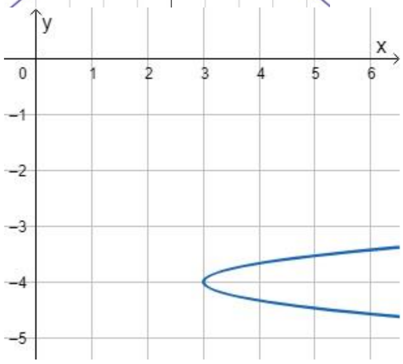












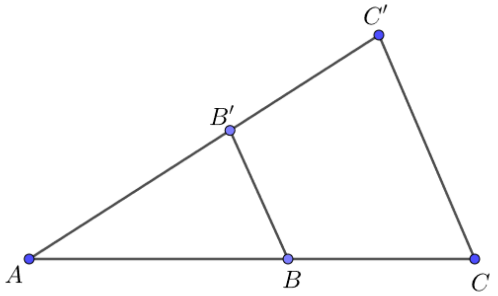
Anexo del Capítulo 3

En el anexo del capítulo 1 ya estudiamos proporcionalidad numérica. Otra aplicación matemática habitual de las proporciones es cuando estudiamos semejanza de figuras.

Triángulos semejantes

Se dice que dos figuras geométricas son **semejantes** si tienen la misma forma pero sus tamaños son diferentes. Por ejemplo, dos mapas a escalas distintas son semejantes, pues la forma del contenido no cambia, pero sí el tamaño.

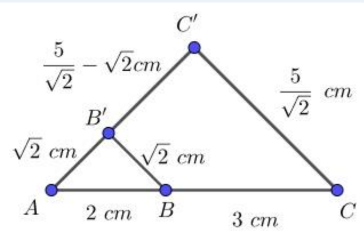
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales, con lo cual el tercer ángulo también lo será. En este tipo de triángulos, los lados son proporcionales. Por ejemplo, en la siguiente figura, los triángulos ABB' y ACC' son semejantes.



Entonces

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AC'}} \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CC'}} \qquad \frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{CC'}}$$

Si consideramos la siguiente figura



tenemos que

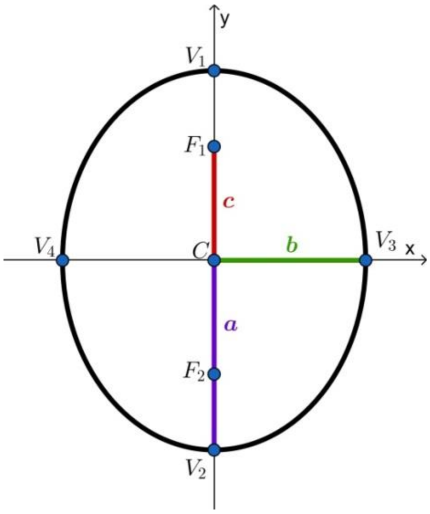
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{2\ cm}{\sqrt{2}\ cm} = \sqrt{2}, \quad \text{mientras que} \quad \frac{AC}{AC'} = \frac{5\ \ cm}{\frac{5}{\sqrt{2}}cm} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AB}{BB'} = \frac{2\ cm}{\sqrt{2}\ cm} = \sqrt{2}\ , \text{mientras que} \quad \frac{AC}{CC'} = \frac{5\ \ cm}{\frac{5}{\sqrt{2}}cm} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{\sqrt{2}\ cm}{\sqrt{2}\ cm} = 1, \quad \text{mientras que} \quad \frac{AC'}{CC'} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}cm}{\frac{5}{\sqrt{2}}cm} = 1$$

Focos de la elipse

Del mismo modo en que las distancias entre los vértices principales y los vértices secundarios tienen constantes asociadas, que llamamos $2a$ y $2b$ respectivamente, normalmente se asocia la constante $2c$ a la distancia entre F_1 y F_2, y se conoce a esta constante como **distancia focal**.

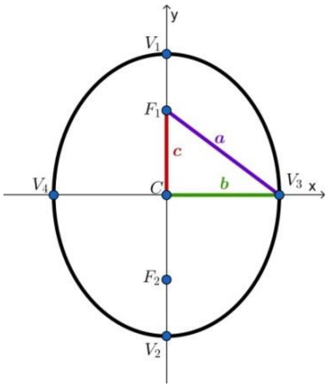


.

Las constantes a, b y c están relacionadas mediante la igualdad

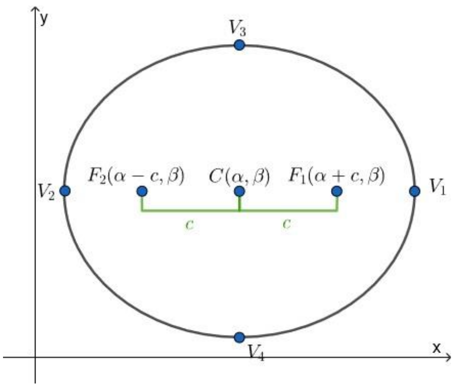
$$a^2 = b^2 + c^2$$

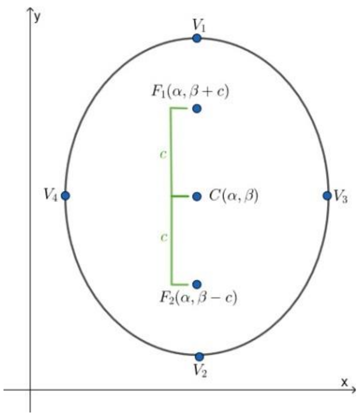
Esto puede ser interpretado en una elipse aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo con vértices en el centro, en un foco y en un vértice secundario.



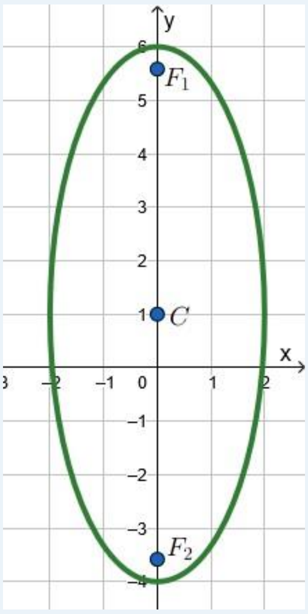
Además, el conocer la constante $c > 0$ y el centro de la elipse nos permite tener expresiones para los focos F_1 y F_2:

- Si la elipse tiene eje principal horizontal, tenemos los focos $F_1(\alpha + c, \beta)$ y $F_2(\alpha - c, \beta)$.
- Si la elipse tiene eje principal vertical, los focos son $F_1(\alpha, \beta + c)$ y $F_2(\alpha, \beta - c)$.



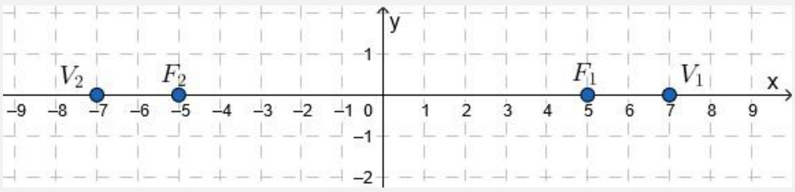


La elipse de ecuación $\frac{x^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$ es una elipse con eje principal vertical, con centro en $(0,1)$ y con una constante $c=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$. Por lo tanto, los focos de la elipse son $F_1(0,1+\sqrt{21})$ y $F_2(0,1-\sqrt{21})$.



Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen, con un vértice en el punto $V_1(7,0)$ y un foco en el punto $F_2(-5,0)$.

Para comenzar, podemos graficar los datos que tenemos y completar con el vértice y el foco que son simétricos con respecto al centro de la elipse:



Esto nos permite ver que tenemos una elipse con eje principal horizontal. Además, sabemos que los puntos $V_2(-7,0)$ y $F_1(5,0)$ serán un vértice y foco, respectivamente, ya que son simétricos a los puntos dados con respecto al origen. La ecuación de la elipse será de la forma

$$\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=1,$$

Donde a es la distancia de los vértices al origen y b es la distancia de los vértices secundarios al centro.

Como $V_1(7,0)$ es un vértice, podemos calcular su distancia al centro, que resulta ser

$$a=\sqrt{(7-0)^2+(0-0)^2}=7.$$

Además, podemos calcular la distancia de los focos al centro para obtener el valor de la constante c:

$$c=\sqrt{(-5-0)^2+(0-0)^2}=5.$$

Ahora, utilizando la ecuación $a^2=b^2+c^2$, podemos hallar el valor de b:

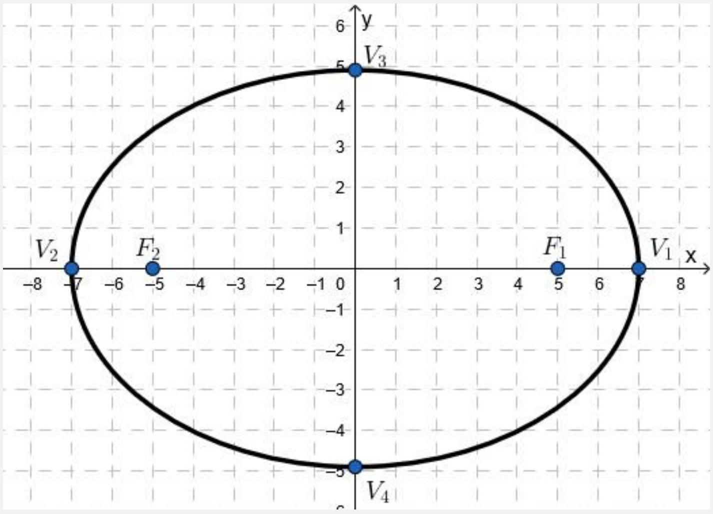
$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24.$$

Por lo tanto $b = \sqrt{24}$.

Finalmente, reemplazamos estos valores en la ecuación original para obtener:

$$\frac{(x-0)^2}{7^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\sqrt{24}\right)^2} = 1.$$

Gráficamente, la elipse que obtuvimos se puede representar

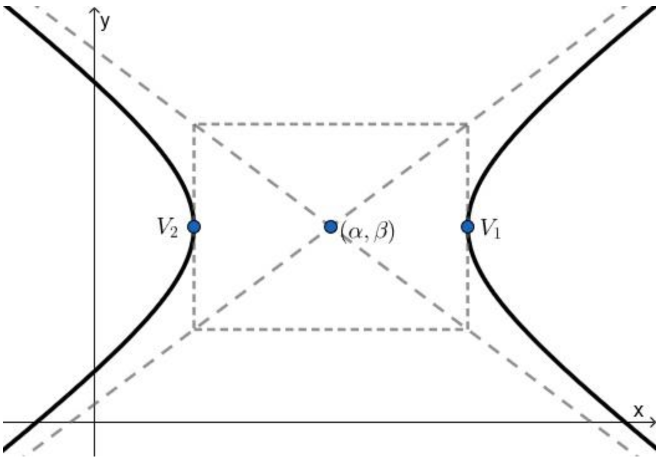


Hipérbola con centro $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

Del mismo modo que vimos con las elipses que no estaban centradas en $(0{,}0)$, si el centro de la hipérbola es el punto (α, β) y el eje principal es horizontal, la ecuación canónica es

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

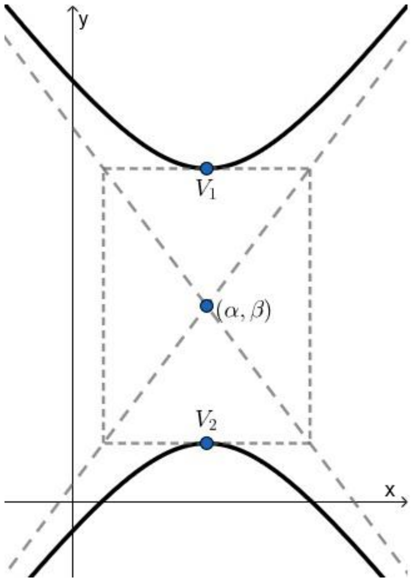
Ecuación canónica de la hipérbola con eje principal horizontal



Por otro lado, si tenemos una hipérbola con eje principal vertical y con centro en el punto (α, β), la ecuación canónica es

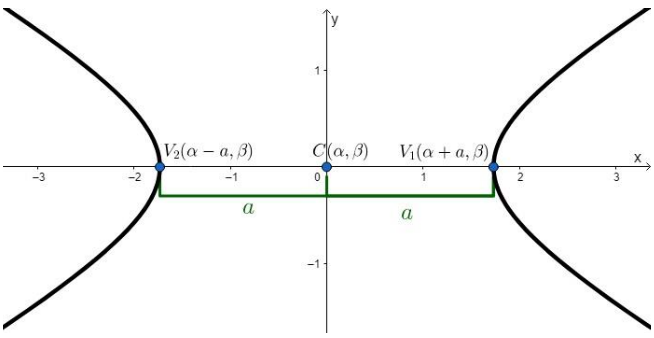
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

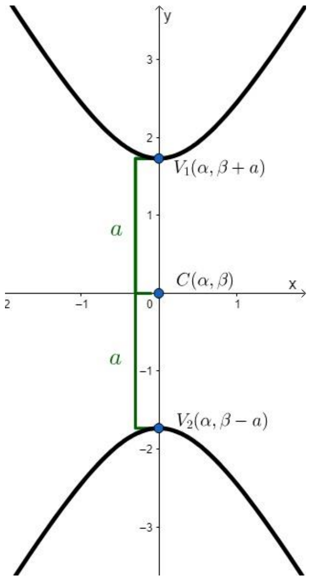
Ecuación canónica de la hipérbola con el eje principal vertical



A partir de la ecuación canónica de la hipérbola con centro en (α, β), podemos obtener una fórmula general para los vértices. Las expresiones son las siguientes:

- Si la hipérbola es de eje principal horizontal entonces los vértices son $V_1(\alpha + a, \beta)$ y $V_2(\alpha - a, \beta)$, como se ve en el gráfico izquierdo.
- Si la hipérbola es de eje principal vertical los vértices son $V_1(\alpha, \beta + a)$ y $V_2(\alpha, \beta - a)$, como se ve en el gráfico derecho.

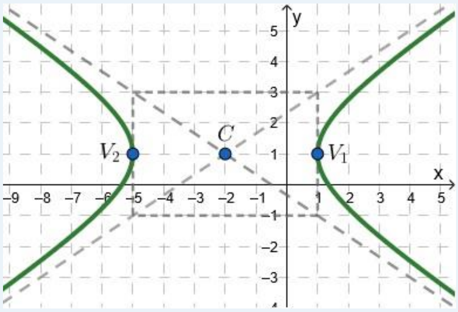




La hipérbola de ecuación $\frac{(x+2)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ es una hipérbola con eje principal horizontal y centro $(-2,1)$. Luego, los vértices serán los puntos

$$V_1(-2+3,1) = V_1(1,1) \quad \text{y} \quad V_2(-2-3,1) = V_2(-5,1).$$

Si observamos la gráfica, es sencillo reconocer que estos son los vértices:



Hallar la ecuación de la hipérbola de eje principal vertical con centro en $(0,-2)$*, con distancia entre los vértices de* 8 *unidades y con constante* $b = 3$*. Explicitar sus elementos principales.*

En primer lugar, sabemos que, como la hipérbola es vertical, su ecuación canónica será de la forma

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1,$$

donde $(\alpha,\beta) = (0,-2)$ *es el centro.*

Además, como la distancia entre los vértices es de 8 *unidades, tenemos que* $2a = 8$*, por lo que* $a = 4$*.*

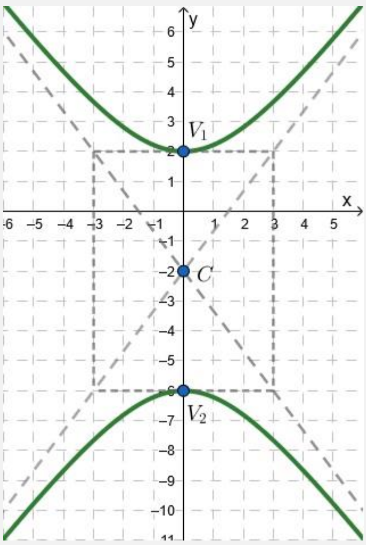
Si reemplazamos estos valores en la ecuación, obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{(y+2)^2}{4^2} - \frac{(x-0)^2}{3^2} = 1.$$

Finalmente, los elementos principales de la hipérbola son:

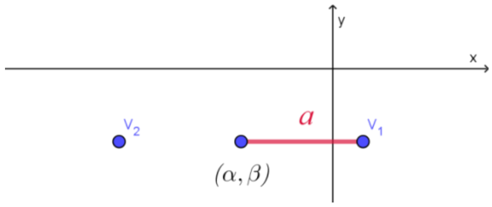
Centro $(0,-2)$

Vértices $V_1(0,-2+4) = V_1(0,2)$ *y* $V_2(0,-2-4) = V_2(0,-6)$*.*

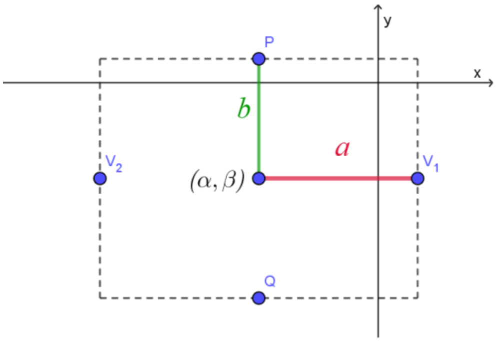


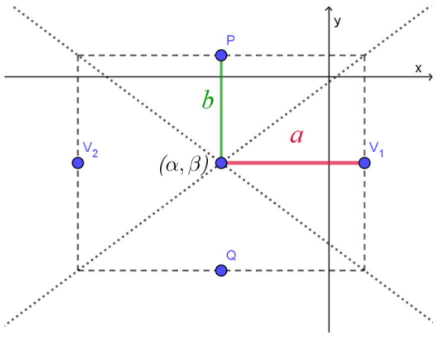
Cómo graficar una hipérbola

Para graficar una hipérbola de eje principal horizontal, nos ubicamos en el centro (α, β), y a partir de ahí, nos movemos a unidades hacia la derecha y hacia la izquierda y marcamos esos dos puntos (que serán los vértices).

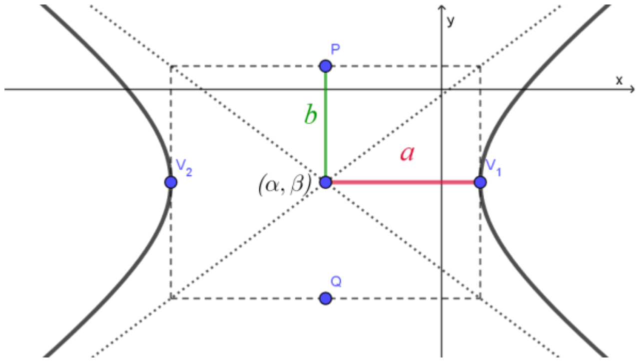


Luego, desde el centro nos movemos b unidades hacia arriba y hacia abajo y marcamos dos puntos auxiliares. Con los cuatro puntos marcados formamos un rectángulo auxiliar (gráfico de la izquierda) y luego trazamos dos rectas que pasen por las diagonales del rectángulo.

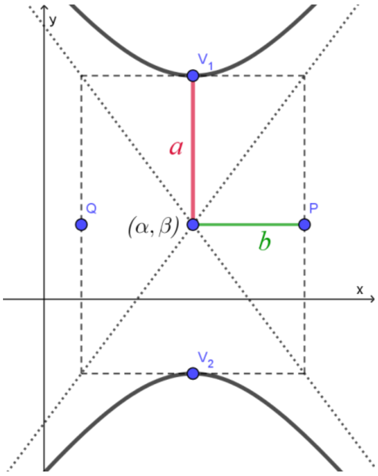




Finalmente, dibujamos las ramas de la hipérbola hacia la derecha y la izquierda, pasando por los vértices y acercándose a las últimas rectas que dibujamos para obtener una representación gráfica de la hipérbola.



Si lo que queremos es graficar una hipérbola de eje principal vertical, nos ubicamos en el centro (α, β) y, a partir de ahí, nos movemos a unidades hacia arriba y hacia abajo y marcamos esos dos puntos (que serán los vértices). Luego, desde el centro nos movemos b unidades hacia la derecha y hacia la izquierda y marcamos dos puntos auxiliares. Con los cuatro puntos marcados formamos el rectángulo auxiliar y trazamos las diagonales. Finalmente, dibujamos las ramas de la hipérbola hacia arriba y hacia abajo, pasando por los vértices y acercándose a las últimas rectas que dibujamos.



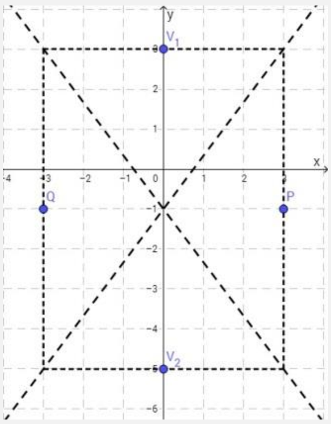
Graficar la hipérbola de ecuación

$$\frac{(y+1)^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

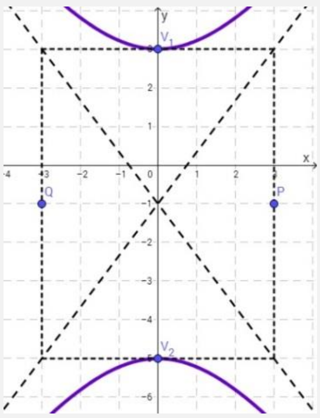
En primer lugar, observemos que es una hipérbola de eje principal vertical con centro en $(0,-1)$. *Tenemos, entonces, que los vértices serán los puntos*

$$V_1(0,-1+4) = V_1(0,3) \quad y \quad V_2(0,-1-4) = V_2(0,-5).$$

Además, vamos a ubicar los dos puntos auxiliares $P(0+3,-1) = P(3,-1)$ *y* $Q(0-3,-1) = Q(-3,-1)$ *en un gráfico y trazar el rectángulo que queda determinado por estos puntos, los vértices y luego trazamos las diagonales de ese rectángulo*



Ahora, dibujemos las ramas de la hipérbola que pasan por los vértices y que se acercan a las diagonales dibujadas y tenemos la gráfica de la hipérbola

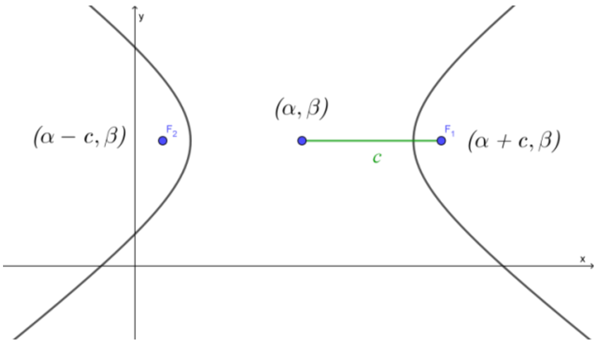


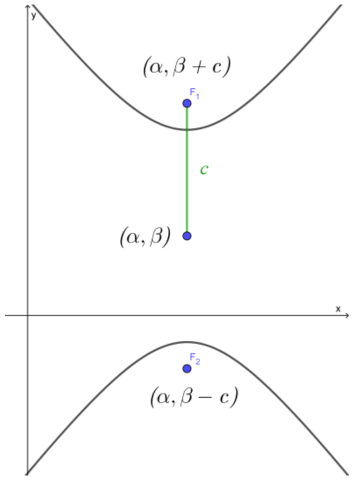
Tal como vimos con las elipses, la distancia entre los focos F_1 y F_2 de una hipérbola se llama **distancia focal**, y le asociamos la constante $2c$. En este caso, la relación entre las constantes a, b y c está dada por

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Además, si conocemos la constante $c > 0$ y el centro de la hipérbola (α, β), podemos tener expresiones para los focos:

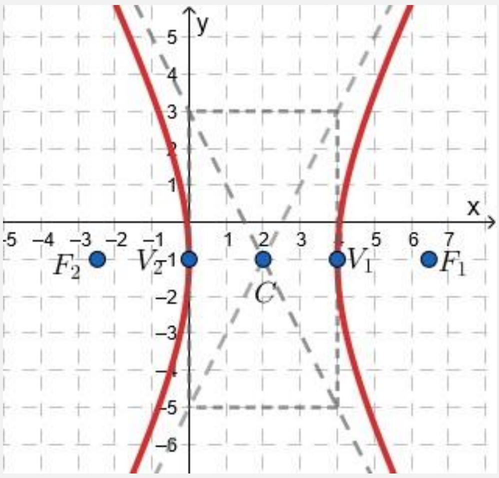
- Si la hipérbola es de eje principal horizontal $F_1(\alpha + c, \beta)$ y $F_2(\alpha - c, \beta)$.
- Si la hipérbola es de eje principal vertical $F_1(\alpha, \beta + c)$ y $F_2(\alpha, \beta - c)$.





Notemos que las ramas de la hipérbola siempre envuelven a los focos.

La hipérbola de ecuación $\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{4^2} = 1$ *es una hipérbola de eje principal horizontal con centro en* $(2, -1)$ *y con una constante* $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$*. Por lo tanto, los focos de la hipérbola son* $F_1(2 + \sqrt{20}, -1)$ *y* $F_2(2 - \sqrt{20}, -1)$.



Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen con un vértice en el punto $V_1(0,3)$ y un foco en el punto $F_2(0,4)$.

Para comenzar, observemos que tanto el centro, como el vértice y el foco están sobre la recta de ecuación $x = 0$. Por lo tanto, tenemos una hipérbola de eje principal vertical, cuya ecuación canónica será de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Además, como la distancia entre el vértice y el centro es igual a 3 unidades, sabemos que $a = 3$.

Por otro lado, como el foco está a distancia 4 unidades del centro, sabemos que $c = 4$. Si reemplazamos los valores de a y b en la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos:

$$4^2 = 3^2 + b^2,$$

de lo cual podemos deducir que $b = \sqrt{7}$ (nos quedamos con la solución positiva, dado que b es el valor de una distancia).

Con estos datos podemos obtener la ecuación canónica de la hipérbola:

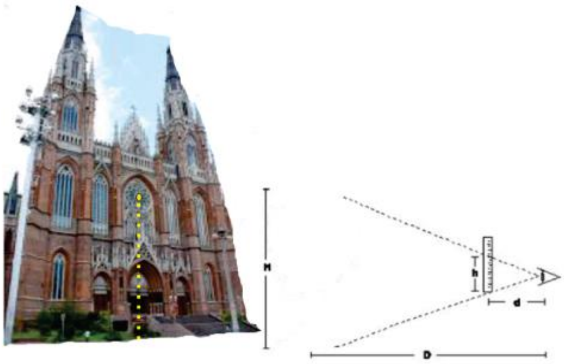
$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

CAPÍTULO 4

Trigonometría

Catedral de la ciudad de La Plata

¿Alguna vez se te ocurrió pensar cómo se puede calcular o aproximar la altura del centro del rosetón de la Catedral de La Plata, respecto del piso, estando situados en el centro de la Plaza Moreno sin tener ningún elemento de medición mecánico o digital?

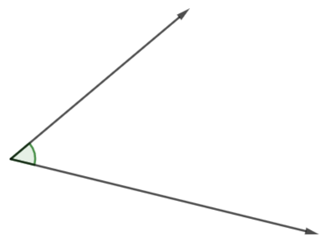
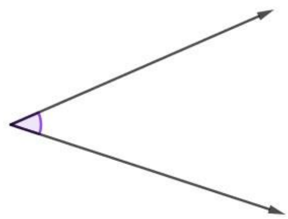


Utilizando elementos simples como escuadra, regla, trasportador, metro u otros y aplicando los conceptos de trigonometría que estudiaremos en este capítulo, podrás hallar una buena aproximación de la altura del rosetón.

La palabra **trigonometría** significa medida de triángulos y, justamente, consiste en relacionar y hacer cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. Esto podría servir para resolver, por ejemplo, el problema planteado. Por este motivo, a continuación recordamos distintas maneras de medir ángulos.

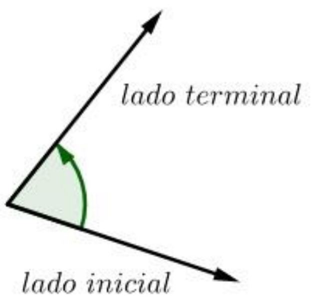
Ángulos

Un **ángulo** puede interpretarse de dos maneras diferentes:

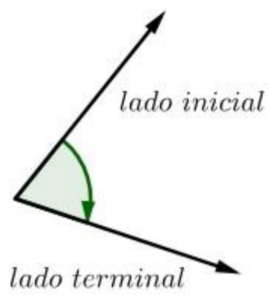
Es la región del plano limitada por dos semirrectas que tienen el mismo origen. 	Es la región del plano barrida por una semirrecta que gira respecto de su origen desde una posición inicial hasta una posición final. 

Los ángulos suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal.

Llamaremos **lado inicial** a una de las dos semirrectas del ángulo y, a la otra, la llamaremos **lado terminal,** quedando definido el ángulo como el resultado de la rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal. Si esa rotación es en el sentido contrario a las agujas del reloj, se considera que el ángulo es **positivo**, mientras que, si lo medimos en el sentido de las agujas del reloj, el ángulo es **negativo**.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Por lo general, utilizaremos letras griegas para nombrar a los ángulos. Las más conocidas son

$$\alpha = alfa \qquad \beta = beta \qquad \gamma = gamma \qquad \delta = delta \qquad \theta = tita\ (theta)$$

Otra letra griega muy utilizada en este capítulo, será la letra $\pi = pi$, pero no se utilizará para nombrar a los ángulos, sino que tendrá un papel más importante que veremos más adelante.

Al principio del apunte está el alfabeto griego completo.

En parte de la bibliografía se utiliza la notación $\hat{\alpha}$ para notar que se trata de un ángulo. Nosotros vamos a prescindir de esa notación, utilizando en este capítulo las letras griegas para denotar ángulos (excepto π, que representa un número).

Sistemas de medición

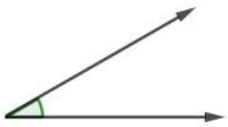
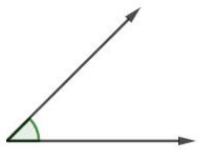
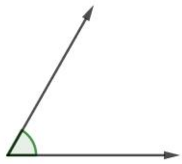
La **medida** de un ángulo es "cuánto" debe girar el lado inicial alrededor del vértice para que coincida con el lado terminal. Intuitivamente, se trata de la "apertura" del ángulo. Existen diferentes unidades de medida que se definen a partir del ángulo central de la circunferencia. Nosotros estudiaremos los grados sexagesimales $(°)$ y los radianes.

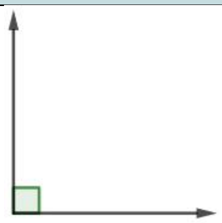
Usualmente, cuando nos referimos a la medida de un ángulo α diremos, por ejemplo, directamente $\alpha = 30°$. Lo mismo sucederá cuando nos referimos a longitudes de segmentos, escribiremos $a = 45\ cm$ en lugar de escribir que a mide $45\ cm$.

Sistema sexagesimal

Un **grado sexagesimal** es la medida del ángulo obtenido al dividir el ángulo central de una circunferencia en 360 partes iguales. Por lo tanto, el ángulo central de la circunferencia mide $360°$. Un ángulo recto es un ángulo que mide $90°$.

Algunos ejemplos de ángulos dados en sistema sexagesimal son los siguientes:

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
			

$90°$	$180°$	$360°$
		

Hay, además, graduaciones menores al grado, que son los minutos $(')$ y los segundos $('')$. Tenemos que

$$1° = 60' \qquad 1' = 60''$$

Entonces, $1° = 3600''$.

Actividades

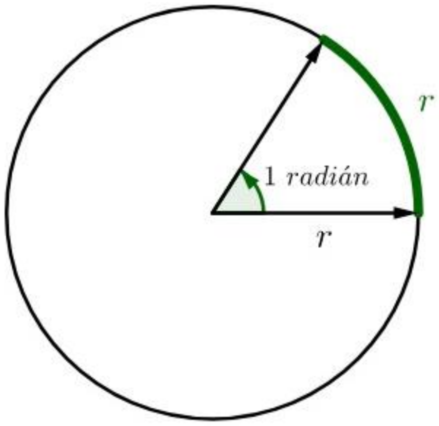
1. Calcular cuántos grados miden los siguientes ángulos:
   a) $25°\ 120'$ b) $-0°\ 60'\ 3540''$ c) $89°\ 58'\ 120''$
2. Representar los siguientes ángulos en un gráfico:

$$135° \qquad 270° \qquad -90° \qquad 180° \qquad 405°$$

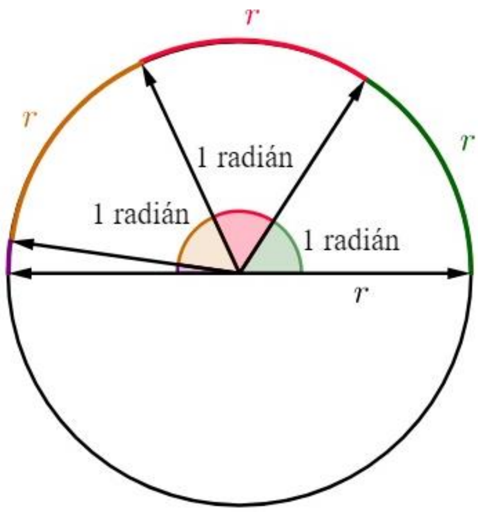
Sistema radial o circular

Otra unidad de medida que utilizaremos en el curso, y que será muy utilizada en Matemática A y Matemática B, es el radián (rad). Los radianes representan una forma de medir ángulos usando números reales, es decir, que un radián es un número real.

Un **radián** se define como la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.



Si consideramos un ángulo llano, ¿cuántas veces entraría el radio en el arco determinado por ese ángulo? Es decir, ¿a cuántos radianes equivale un ángulo llano?

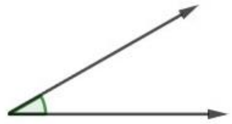
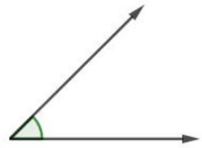
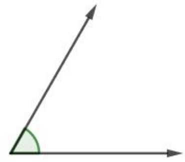


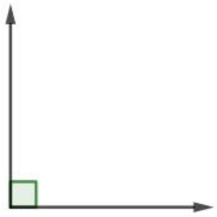
Como observamos en el gráfico, el radio entra un poco más de tres veces en el arco. Esa cantidad[1] es un número irracional que se llama pi y lo representamos con la letra griega π. Por lo tanto, un ángulo llano mide π radianes.

Recordemos que dada una circunferencia de radio r su perímetro es $2\pi r$, lo cual es equivalente a pensar cuántos radianes entran en el arco de una circunferencia completa. Es decir, en la circunferencia entra 2π veces el radio.

[1] El número irracional π tiene infinitas cifras decimales. Las primeras son: $\pi = 3{,}141592\ ...$

Algunos ejemplos de ángulos dados en radianes están en la siguiente tabla:

0 radianes	$\frac{\pi}{6}$ **radianes**	$\frac{\pi}{4}$ **radianes**	$\frac{\pi}{3}$ **radianes**
			

$\frac{\pi}{2}$ **radianes**	π **radianes**	2π **radianes**
		

Equivalencias en ambos sistemas

Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, esta contiene 2π veces la longitud del radio. Entonces, tenemos que

$$360° = 2\pi\, rad$$

Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes y viceversa. Si dado un ángulo, llamamos $\alpha°$ al ángulo medido en grados sexagesimales y α_{rad} al ángulo medido en radianes, se deduce que

$$\alpha_{rad} = \alpha°.\frac{2\pi}{360°}\, rad$$

$$\alpha° = \alpha_{rad}.\frac{360°}{2\pi\, rad}$$

Si queremos expresar $45°$ en radianes

$$45°.\frac{2\pi}{360°} rad = \frac{90°\pi}{360°}\, rad = \frac{\pi}{4}\, rad$$

Para convertir $\frac{5\pi}{12}\, rad$ a grados sexagesimales, calcularemos

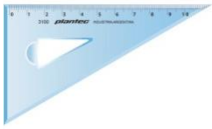
$$\frac{5\pi}{12}\, rad.\frac{360°}{2\pi\, rad} = \frac{1800°\pi}{24\pi}\frac{rad}{rad} = 75°$$

Si debemos escribir un ángulo de $3\, rad$ en grados sexagesimales

$$3\, rad.\frac{360°}{2\pi\, rad} = \frac{540°}{\pi}\frac{rad}{rad} = \frac{540°}{\pi}$$

Los ángulos en radianes suelen escribirse sin rad que identifica el sistema de medición, en cambio, no debemos olvidarnos del símbolo ° cuando queremos referirnos a grados. Si un ángulo no tiene el símbolo ° es porque está en radianes.

Actividades



3. Indicar cuánto miden, en grados sexagesimales, los ángulos interiores de
   a) un triángulo equilátero, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.
   b) los dos tipos de escuadras utilizadas habitualmente.
4. Pasar los siguientes ángulos medidos en grados a radianes.

   a) $180°$ b) $-60°$ c) $12°$ d) $\left(\frac{150}{\pi}\right)°$

5. Convertir estos ángulos medidos en radianes a grados.

   a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $1{,}5\,\pi$ c) 2

   d) $\frac{7}{12}\pi$ e) $\frac{\pi}{5}$ f) 5π

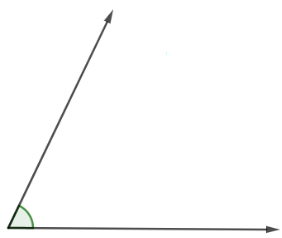
6. Indicar si los siguientes pares de ángulos son iguales o no. Justificar la respuesta.

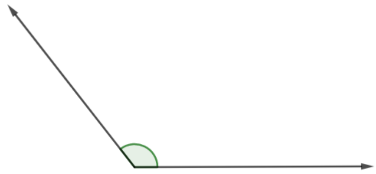
   a) $30°$ y $\frac{\pi}{6}$ b) $-60°$ y $-\frac{1}{3}$

   c) $270°$ y $\frac{6}{4}\pi$ d) $-75°$ y $\frac{5}{12}\pi$

Clasificación de los ángulos

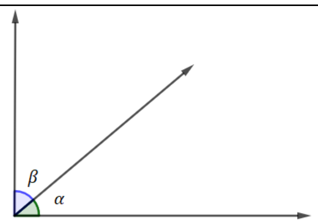
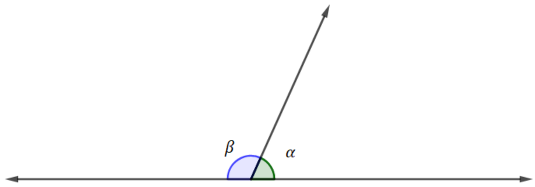
Dependiendo de su medida, los ángulos se pueden clasificar en ángulos nulos, agudos, rectos, obtusos, llanos y completos, como se puede ver en la siguiente tabla:

Clasificación de α	**Ángulo en grados**	**Ángulo en radianes**	**Representación**
Ángulo nulo	$\alpha = 0°$	$\alpha = 0$	
Ángulo agudo	$0° < \alpha < 90°$	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	
Ángulo recto	$\alpha = 90°$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	

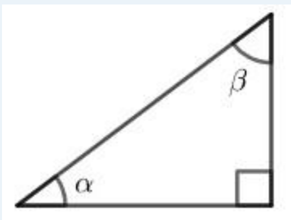
Ángulo obtuso	$90° < \alpha < 180°$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	
Ángulo llano	$\alpha = 180°$	$\alpha = \pi$	
Ángulo completo (o giro completo)	$\alpha = 360°$	$\alpha = 2\pi$	

Ángulos complementarios y suplementarios

Dados dos ángulos, existen definiciones especiales para los casos en que la suma de las medidas de ambos resulte un ángulo recto o llano.

Los ángulos α y β se llaman **complementarios** cuando su suma es $\frac{\pi}{2}$ o $90°$.	Los ángulos α y β se llaman **suplementarios** cuando su suma es π o $180°$.
	

Los ángulos α y β del siguiente triángulo rectángulo son complementarios:



Actividades

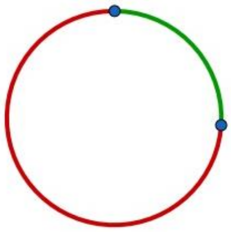
7. Para cada uno de los ángulos α dados, hallar los ángulos β y γ que sean complementario y suplementario de α respectivamente.
   a) $\alpha = 75°$
   b) $\alpha = \frac{5}{12}\pi$
   c) $\alpha = \frac{5}{12}$
8. Armar todos los pares de ángulos que son complementarios o suplementarios utilizando los siguientes ángulos

$$75° \qquad \frac{\pi}{4} \qquad 30° \qquad \frac{\pi}{6} \qquad 165° \qquad \frac{7}{12}\pi \qquad 15° \qquad \frac{2}{3} \qquad 45°$$

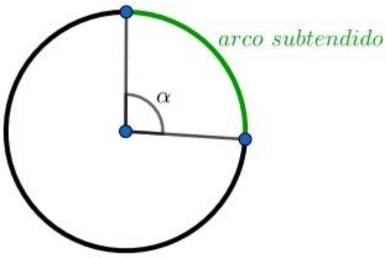
9. Clasificar qué tipo de ángulo es cada uno de los dados en el ejercicio anterior.
10. Clasificar los ángulos interiores de cada uno de los siguientes polígonos regulares haciendo un dibujo aproximado de los mismos:
    a) Triángulo equilátero.
    b) Cuadrado.
    c) Pentágono regular.
    d) Hexágono regular.

Longitud de arco de circunferencia

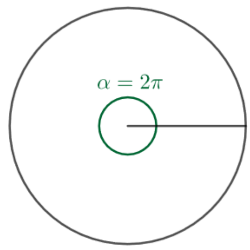
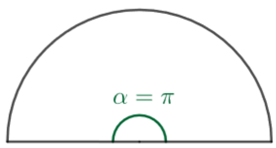
Si tenemos dos puntos distintos de una circunferencia, estos dividen a la misma en dos **arcos**.

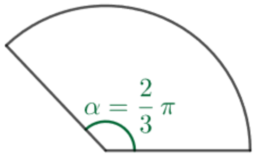
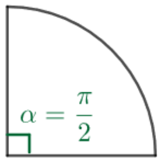


Un **arco de circunferencia** se relaciona con un ángulo central de la misma. A ese arco también se le llama **arco subtendido** por un ángulo central.



Observemos lo que ocurre en los siguientes casos cuando queremos calcular una parte del perímetro de una circunferencia (o la longitud del arco subtendido por distintos ángulos centrales):

Si queremos calcular el perímetro de una circunferencia, es decir, el arco subtendido por el ángulo 2π, sabemos que la ecuación es $$Long_{2\pi} = 2\pi . r$$	
Si queremos calcular el perímetro de media circunferencia, es decir, el arco subtendido por el ángulo π, sabemos que la ecuación es $$Long_{\pi} = \frac{2\pi . r}{2} = \pi . r$$	

Si queremos calcular el perímetro de un tercio de circunferencia, es decir, el arco subtendido por el ángulo $\frac{2\pi}{3}$, sabemos que la ecuación es $$Long_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi.r}{3} = \frac{2\pi}{3}.r$$	
Si queremos calcular el perímetro de un cuarto de circunferencia, es decir, el arco subtendido por el ángulo $\frac{\pi}{2}$, sabemos que la ecuación es $$Long_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi.r}{4} = \frac{\pi}{2}.r$$	

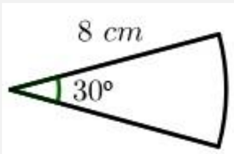
En general, si tenemos el ángulo central dado en radianes, la longitud del arco subtendido por el ángulo está dada por

$$Long_{\alpha} = \alpha_{rad}.r$$

Si en lugar de tener el ángulo central dado en radianes lo tenemos en grados, podemos utilizar la fórmula de conversión de radianes a grados y obtenemos

$$Long_{\alpha} = \frac{\alpha°.2\pi}{360°}.r$$

Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $30°$ *en una circunferencia de radio* $8\ cm$*.*



Tenemos que el radio de la circunferencia mide $8\ cm$*. Como el ángulo está en grados, tenemos dos opciones: Utilizamos la segunda de las fórmulas, o pasamos el ángulo a radianes y luego utilizamos la primera de las opciones.*

Si pasamos $30°$ *a radianes, tenemos que* $30°.\frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{6}$ *y, entonces,*

$$Long_{30°} = \frac{\pi}{6}.8\ cm = \frac{4}{3}\pi\ cm$$

Por lo tanto, la longitud es de $\frac{4}{3}\pi\ cm$*.*

El péndulo de un reloj tiene $0{,}9\ m$ *de largo y oscila sobre un arco de* $30\ cm$*. Calcular el ángulo que describe el péndulo en radianes y en grados sexagesimales.*

En este caso, sabemos que como el péndulo tiene un largo de $0{,}9$ *metros, esa es la longitud del radio, y tenemos la longitud de arco, que es de* $30\ cm$. *Lo primero que debemos hacer es unificar el sistema de medidas. Si expresamos todo en* cm *tenemos, entonces, que el radio mide* $90\ cm$.

Ahora, solo nos resta encontrar el ángulo. Según la segunda de las fórmulas, tenemos que $30\ cm = \frac{\alpha°.2\pi}{360°}.90\ cm$, *por lo que*

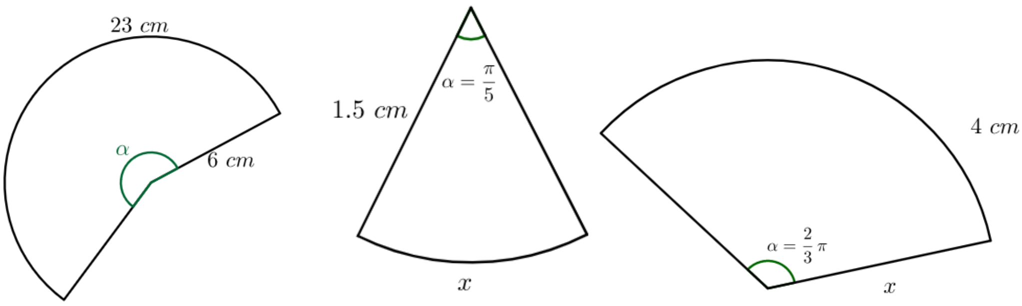
$$\alpha° = \frac{30}{90}.\frac{360°}{2\pi} = \frac{60°}{\pi}$$

Según la primera fórmula, tenemos que $30\ cm = \alpha_{rad}.90\ cm$, *de donde*

$$\alpha_{rad} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

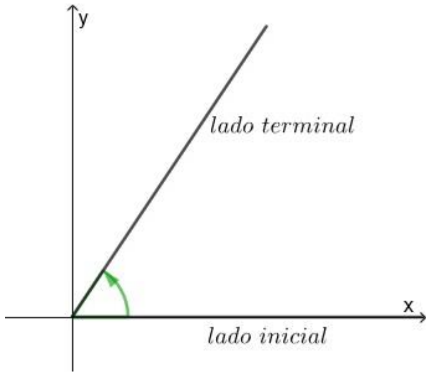
Actividades

11. Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de $30°$ en una circunferencia de radio 7.
12. Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2 radianes en una circunferencia de radio 6.
13. Un péndulo de $80\ cm$ se balancea de un lado a otro describiendo un ángulo de $30°$. Hallar la longitud del arco determinado por el movimiento de la punta del péndulo.
14. Encontrar el valor del dato faltante (x o α) en los siguientes casos:

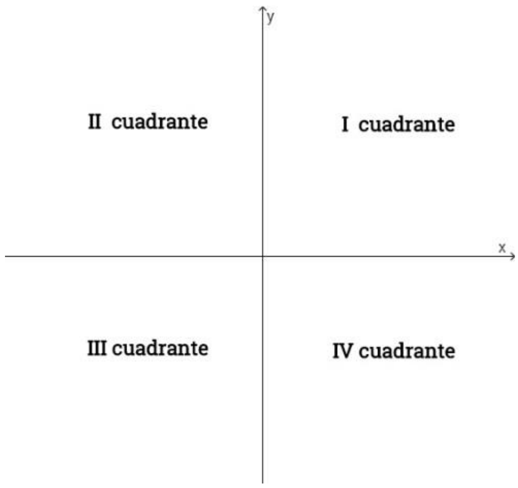


Ángulos en posición normal

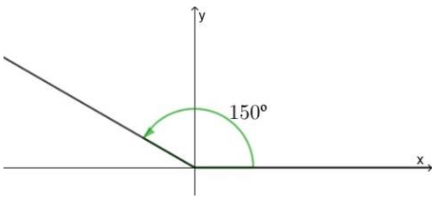
Para representar un ángulo en posición normal, utilizaremos un sistema de coordenadas cartesianas. Hacemos coincidir el lado inicial del ángulo con el semieje positivo de las abscisas (eje x). La posición del lado terminal dependerá de la amplitud del ángulo y de su signo.

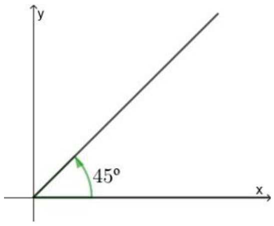


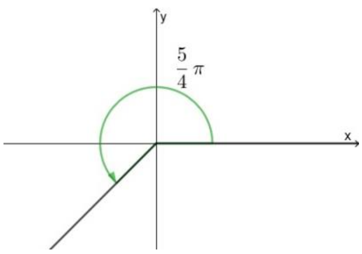
Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes, como lo vimos en el capítulo 3.



Los ángulos se clasifican según el cuadrante al que pertenece su lado terminal. Así, por ejemplo, el ángulo de $150°$ es un ángulo del segundo cuadrante, el ángulo $45°$ del primer cuadrante y el ángulo $\frac{5}{4}\pi$ pertenece al tercer cuadrante.



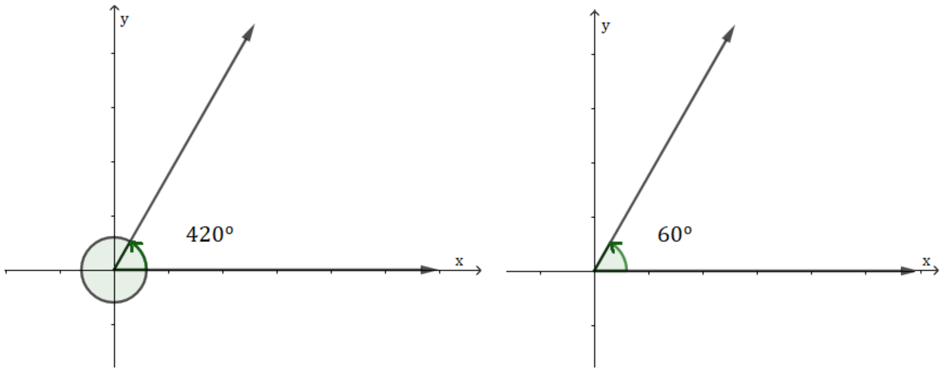




Cuando el lado terminal coincide con uno de los semiejes cartesianos, diremos que ese ángulo está entre los dos cuadrantes que separa ese semieje.

Reducción de un ángulo al primer giro

Al considerar los ángulos como giros, es posible definir ángulos mayores de $360°$. Consideremos, por ejemplo, un ángulo de $420°$. Para girar $420°$, debemos efectuar una vuelta completa más $60°$. Así, pues, la representación de un ángulo de $420°$ coincide con la del ángulo de $60°$, y decimos que $60°$ es el resultado de reducir al primer giro el ángulo de $420°$. Es decir, el ángulo de $60°$ es **coterminal** con el de $420°$, ya que ambos tienen el mismo lado terminal en su posición normal.

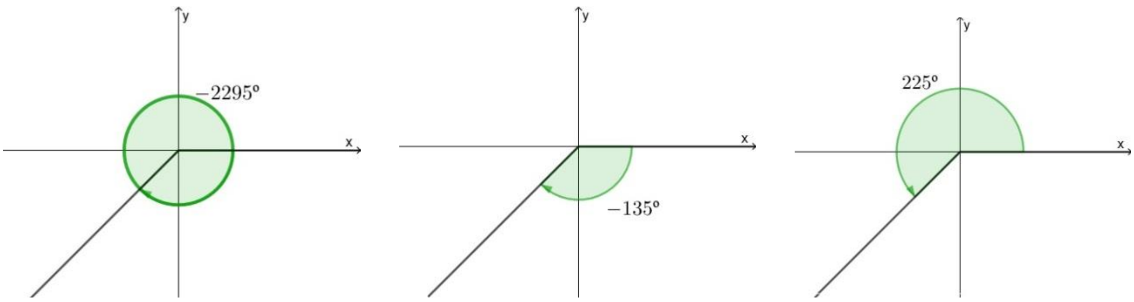


Luego, para reducir un ángulo al primer giro, dividiremos la medida del ángulo por $360°$ para saber cuántas vueltas completas contiene. El resto de la división nos proporciona el ángulo equivalente del primer giro.

> El ángulo de $2550°$ se corresponde en el primer giro con un ángulo de $30°$, ya que si dividimos $2550°$ por $360°$ tenemos: $2550° = 360°.7 + 30°$. Por lo tanto, el ángulo pertenece al primer cuadrante.

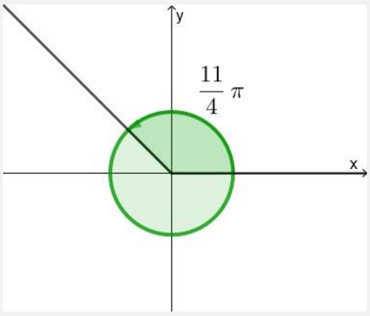
Reducir el ángulo de $-2295°$, representarlo e indicar a qué cuadrante pertenece.

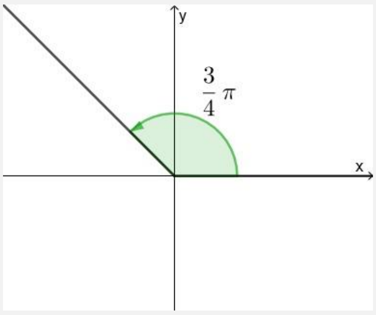
Lo primero que haremos es la división de 2295 por 360, que por el Algoritmo de la división nos queda $2295° = 360°.6 + 135°$, de donde deducimos que si a $-2295°$ le sumamos 6 giros enteros y nos queda un ángulo de $-135°$.
Para graficar este ángulo, podemos pensarlo que gira en el sentido negativo, o que si le sumamos $360°$ nos queda el ángulo $225°$. En ambos casos, podemos ver que este ángulo pertenece al tercer cuadrante, como se ve en las siguientes figuras:



Reducir el ángulo de $\frac{11}{4}\pi$, *representarlo e indicar a qué cuadrante pertenece.*

Notemos que el ángulo de $\frac{11}{4}\pi$ *es mayor a un giro. Si restamos* 2π *(es decir, un giro), obtenemos el ángulo* $\frac{3}{4}\pi$. *Por lo tanto, el ángulo pertenece al segundo cuadrante, como se ve en las siguientes figuras:*





Actividades

15. Representar e indicar a qué cuadrante pertenece cada uno de estos ángulos, reduciéndolos al primer giro en caso de ser necesario

$\frac{4}{3}\pi$ $\quad -75°$ $\quad \frac{3}{4}\pi$ $\quad -270°$ $\quad 1845°$ $\quad -870°$

16. Indicar cuáles de los siguientes pares de ángulos son coterminales y justificar la decisión.

a) $-15°$ y $1425°$

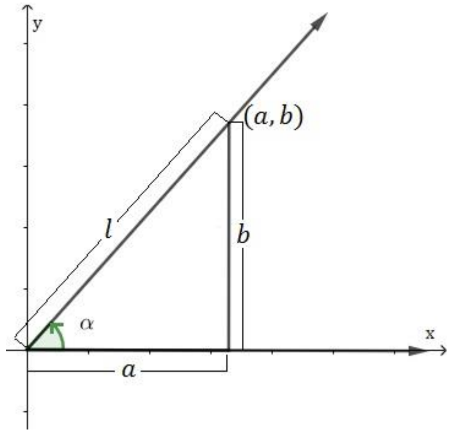
b) π y 6π

c) $-\frac{1}{3}$ y $4\pi-\frac{1}{3}$

d) $45°$ y $\frac{5}{4}\pi$

Relaciones trigonométricas

Dado un ángulo α ubicado en posición normal y un punto (a, b) con a y b no simultáneamente nulos en su lado terminal como indica la figura, llamemos l a la distancia desde el punto (a, b) al punto $(0,0)$, que por el Teorema de Pitágoras sabemos que resulta ser $l = \sqrt{a^2 + b^2}$



Como l es una distancia, debe ser positiva. Por eso elegimos el valor positivo de la raíz al despejar y, de esta manera, no tenemos dos valores diferentes.

Definimos las relaciones (o razones) trigonométricas del ángulo α como:

- La razón (o proporción) entre la ordenada de un punto del lado terminal (a, b) y su distancia l al origen se llama **seno** del ángulo α y se escribe $sen(\alpha) = \frac{ordenada}{distancia} = \frac{b}{l}$.
- La razón entre la abscisa de un punto del lado terminal (a, b) y su distancia l al origen se llama **coseno**[2] del ángulo α y se escribe $cos(\alpha) = \frac{abscisa}{distancia} = \frac{a}{l}$.
- La razón entre la ordenada y la abscisa de un punto del lado terminal (a, b) siempre que sea $a \neq 0$ se llama **tangente** del ángulo α y se escribe $tg(\alpha) = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{b}{a}$.

La tangente de α no está definida si $a = 0$.

Es común también escribir la abreviatura de tangente como $tan(\alpha)$.

Muchas veces resulta útil pensar que $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$, lo cual es sencillo ver que es válido, ya que

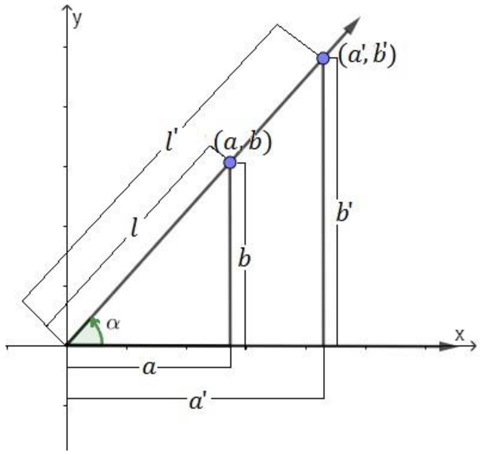
$$tg(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{b/l}{a/l} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}.$$

Si en el mismo lado terminal tomamos otro punto (a', b') y calculamos

$$l' = \sqrt{(a')^2 + (b')^2}$$

[2] Coseno proviene de la abreviatura latina de la expresión “complementi sinus” que quiere decir seno del complemento. Luego se abrevió “co sinus” o “cosinus” de donde surge coseno.

podemos ver que se forman dos triángulos semejantes como se ve en la figura:

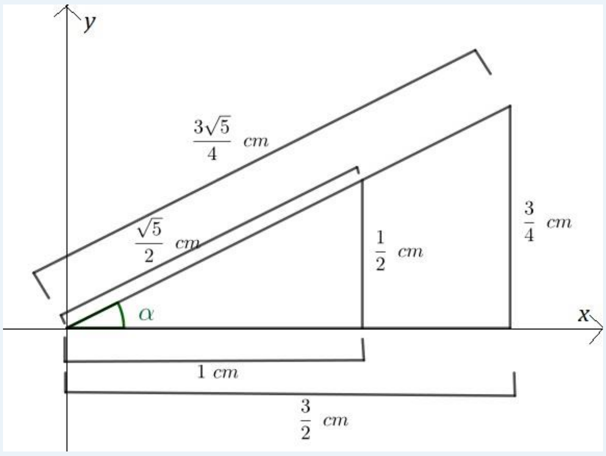


Por el Teorema de triángulos semejantes, sabemos que las proporciones entre los lados correspondientes al mismo ángulo se mantienen, es decir,

$$\frac{b}{l} = \frac{b'}{l'} = sen(\alpha)$$

Luego el seno del ángulo α es independiente del punto escogido del lado terminal. Lo mismo sucede con su coseno y con su tangente.

Si consideramos los siguientes triángulos



tenemos que

$$sen(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\ cm}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ cm} = \frac{\frac{3}{4}\ cm}{\frac{3\sqrt{5}}{4}\ cm} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$cos(\alpha) = \frac{1\ cm}{\frac{\sqrt{5}}{2}\ cm} = \frac{\frac{3}{2}\ cm}{\frac{3\sqrt{5}}{4}\ cm} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\ cm}{1\ cm} = \frac{\frac{3}{4}\ cm}{\frac{3}{2}\ cm} = \frac{1}{2}$$

Observemos que las razones trigonométricas no tienen dimensiones ni unidades, ya que están definidas como el cociente entre dos longitudes.

Resumiendo, dado un punto (a,b) del lado terminal de un ángulo α, con $l=\sqrt{a^2+b^2}$, tenemos que

$$sen(\alpha)=\frac{b}{l} \qquad cos(\alpha)=\frac{a}{l} \qquad tg(\alpha)=\frac{b}{a}$$

siempre que tales relaciones existan (es decir, cuando ninguno de los denominadores sea 0).

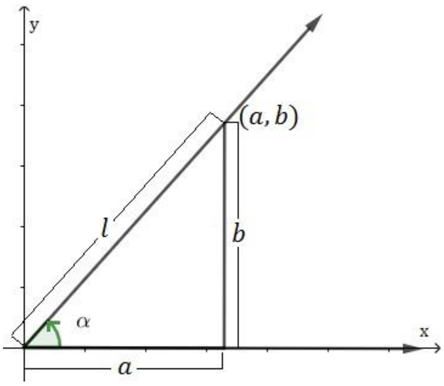
Notemos que dado que l es siempre mayor o igual que $|a|$ y $|b|$, siempre se va a cumplir que $-1\leq\frac{b}{l}=\operatorname{sen}(\alpha)\leq 1$ y $-1\leq\frac{a}{l}=\cos(\alpha)\leq 1$, es decir, que el seno o coseno de un ángulo siempre va a ser mayor o igual que -1 y menor o igual que 1, entonces:

$$-1\leq sen(\alpha)\leq 1 \qquad -1\leq cos(\alpha)\leq 1$$

Relaciones trigonométricas recíprocas

Del mismo modo que definimos las relaciones trigonométricas a partir de un punto como cocientes de la abscisa, ordenada y la distancia del punto al origen, se pueden definir otras relaciones trigonométricas a partir de los otros cocientes con los mismos datos representados en el gráfico

- **Cosecante:** $cosec(\alpha)=\frac{l}{b}$ (si $b\neq 0$)
- **Secante:** $sec(\alpha)=\frac{l}{a}$ (si $a\neq 0$)
- **Cotangente:** $cotg(\alpha)=\frac{a}{b}$ (si $b\neq 0$)

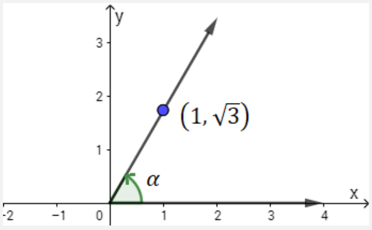


Estas relaciones se llaman relaciones trigonométricas **recíprocas**, ya que son las recíprocas de las relaciones trigonométricas ya estudiadas. Es decir,

$$cosec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}$$
$$sec(\alpha)=\frac{1}{cos(\alpha)}$$
$$cotg(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}$$

No están definidas las relaciones trigonométricas recíprocas cuando el denominador es 0. Por ejemplo, no está definida la cosecante de aquellos ángulos en los que el seno valga 0.

Sea α un ángulo ubicado en posición normal, del que se sabe que su lado terminal contiene al punto $(1, \sqrt{3})$. Determinar las relaciones trigonométricas de α.



Calculemos primero la longitud del segmento que une al origen con el punto contenido en el lado terminal. Tenemos, entonces,

$$l = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Luego, las relaciones trigonométricas son

$sen(\alpha) = \frac{b}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cosec(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$cos(\alpha) = \frac{a}{l} = \frac{1}{2}$	$sec(\alpha) = \frac{1}{1/2} = 2$
$tg(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$cotg(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

En la resolución de los ejercicios no es obligatorio racionalizar (salvo que sea requerido en el enunciado). En algunos ejemplos se realiza esta operación para mostrar la igualdad y ambas respuestas son correctas.

Sabiendo que α es un ángulo agudo tal que $sen(\alpha) = \frac{4}{7}$ hallar las restantes relaciones trigonométricas para α.

Como sabemos que $sen(\alpha) = \frac{b}{l}$ podemos considerar que un punto en el lado terminal que determina ese ángulo cumple que $b = 4$ y $l = 7$. Debemos buscar el valor de $a > 0$ tal que $\sqrt{a^2 + 4^2} = 7$.

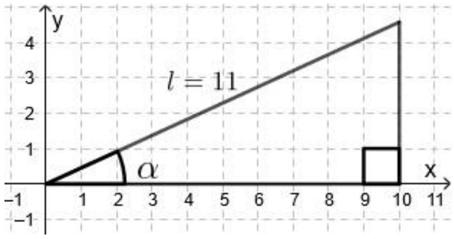
Tenemos, entonces, que $a = \sqrt{33}$. Por lo tanto las relaciones trigonométricas son:

$sen(\alpha) = \frac{4}{7}$	$cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{7}{4}$
$cos(\alpha) = \frac{\sqrt{33}}{7}$	$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} = \frac{7}{\sqrt{33}}$
$tg(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{33}}$	$cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{\sqrt{33}}{4}$

Observación: Como $sen(\alpha) = \frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ podríamos haber tomado, por ejemplo, $b = 8$ y $l = 14$, con lo que averiguando el valor de a correspondiente hubiéramos obtenido los mismos resultados.

Actividades

17. Calcular el valor de las razones trigonométricas del ángulo α que en posición normal tiene el lado terminal que pasa por el punto $(4,3)$.
18. Sabiendo que las coordenadas de un punto P del lado terminal de un ángulo en posición normal son $(-4,-6)$, calcular el valor de las razones trigonométricas de dicho ángulo.
19. Sea $\alpha \in I$ cuadrante, dado en posición normal y tal que $tg(\alpha) = \frac{3}{7}$.
    a) Determinar las coordenadas de un punto que pertenezca al lado terminal del ángulo. ¿Se podrían conseguir más puntos?
    b) Hallar $sen(\alpha)$ y $cos(\alpha)$.
20. Sabemos que $sen(\alpha) = -\frac{4}{5}$, que $\alpha \in III$ cuadrante y está en posición normal.
    a) Determinar las coordenadas de un punto que pertenezca al lado terminal del ángulo.
    b) Hallar $cos(\alpha)$ y $tg(\alpha)$.
21. Determinar las relaciones trigonométricas para el ángulo α representado en la figura:

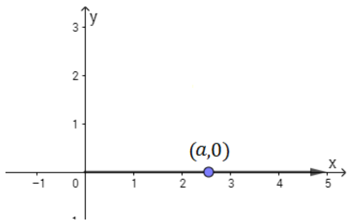


Relaciones trigonométricas de ángulos especiales

A partir de las definiciones de las relaciones trigonométricas, calcularemos algunas de ellas para ciertos ángulos. Los valores de las relaciones trigonométricas los obtendremos buscando en cada caso un punto en el lado terminal.

Relaciones trigonométricas del ángulo $0°$ *o* $0\ rad$

Si ubicamos el ángulo nulo en un sistema de coordenadas en posición normal, tenemos el lado terminal coincidente con el lado inicial. Podemos tomar cualquier punto sobre el lado terminal, que será de la forma $(a,0)$ con $a > 0$, de donde $l = \sqrt{a^2 + 0^2} = a$, entonces



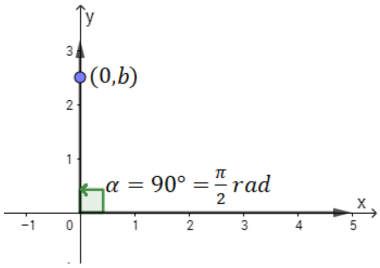
$$sen(0°) = sen(0) = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos(0°) = cos(0) = \frac{a}{a} = 1$$

$$tg(0°) = tg(0) = \frac{0}{a} = 0$$

Relaciones trigonométricas del ángulo de $90°$ *o* $\pi/2$

Si ubicamos el ángulo recto en un sistema de coordenadas en posición normal, tenemos el lado terminal coincidente con el eje positivo de las y. Podemos tomar cualquier punto sobre el lado terminal, que será de la forma $(0, b)$ con $b > 0$, de donde $l = \sqrt{0^2 + b^2} = b$, entonces



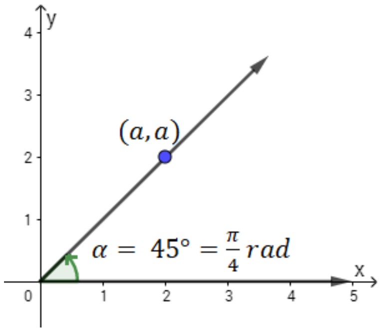
$$sen(90°) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

$$cos(90°) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{b} = 0$$

No se puede definir $tg(90°)$ o $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, pues en ese caso $a = 0$.

Relaciones trigonométricas del ángulo de $45°$ *o* $\pi/4$

El ángulo de $45°$ divide al primer cuadrante por la mitad. Entonces, un punto del lado terminal debe tener la primera coordenada igual a la segunda, es decir, es un punto de la forma (a, a) con $a > 0$, y además $l = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$, entonces



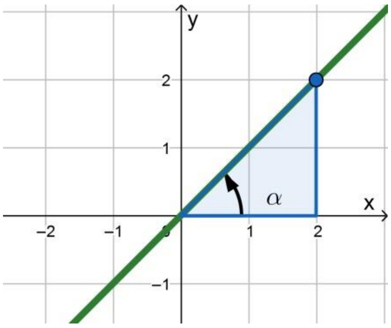
$$sen(45°) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos(45°) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45°) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{a} = 1$$

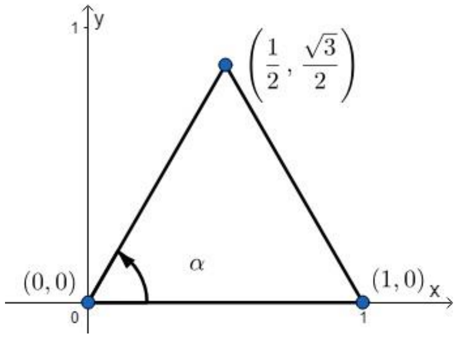
Sabemos que la recta que divide al primer cuadrante $y = x$ tiene pendiente 1, que es, justamente, la tangente del ángulo de $45°$.

Esto se puede deducir seleccionando cualquier punto de la recta en el primer cuadrante y calculando la tangente del ángulo que queda determinado por el eje x y la recta, como en el gráfico de la derecha.



Relaciones trigonométricas del ángulo de $60°$ *o* $\pi/3$

En un sistema coordenado tomemos los puntos $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(1,0)$ y construyamos un triángulo con ellos.



Notemos la distancia entre $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es 1, ya que

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

y que la distancia entre $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(1,0)$ también es 1, pues

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

además de que la distancia entre $(0,0)$ y $(1,0)$ es nuevamente 1.

Por lo tanto, el triángulo formado es un triángulo equilátero, con lo que los tres ángulos deben ser iguales. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, cada ángulo mide $60°$.

Tenemos, entonces, que un punto en el lado terminal de un ángulo de $60°$ es el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, con $l=1$, por lo que

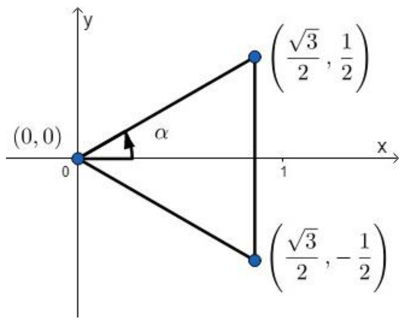
$$sen(60°)=sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}/2}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(60°)=cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$$

$$tg(60°)=tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{1}=\sqrt{3}$$

Relaciones trigonométricas del ángulo de $30°$ *o* $\pi/6$

En un sistema coordenado, tomemos ahora los puntos $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y construyamos un triángulo con ellos.



Notemos que es el mismo triángulo que dibujamos para deducir las relaciones para el ángulo de $60°$, pero ahora ubicado en otra posición. Rehaciendo las cuentas para calcular las medidas de los lados, llegaremos a que los mismos miden 1 y, nuevamente, el triángulo es equilátero. Pero el ángulo que nos interesa ahora mide la mitad del ángulo anterior, o sea $30°$.

Tenemos, entonces, que un punto en el lado terminal de un ángulo de $30°$ es el $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ con $l=1$, de lo que deducimos los valores de las relaciones trigonométricas correspondientes

$$sen(30°) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$cos(30°) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg(30°) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

En resumen, para los ángulos especiales para los que calculamos las relaciones trigonométricas obtuvimos:

Ángulos notables	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

Reducción al primer cuadrante

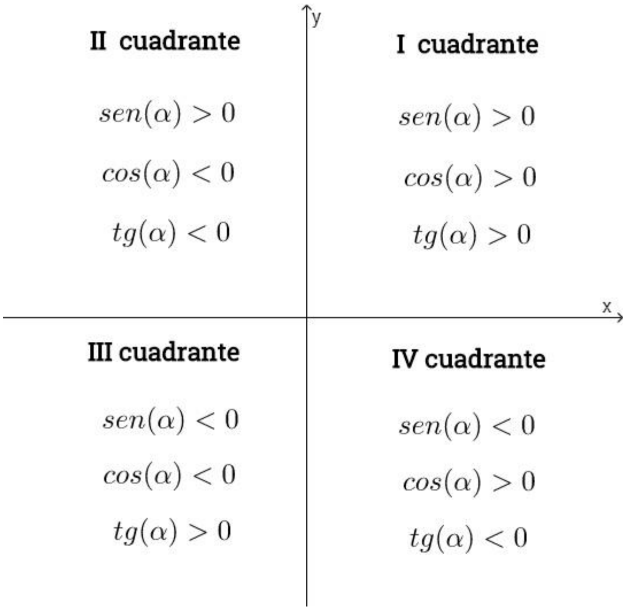
Hemos estudiado los valores de las relaciones trigonométricas en algunos ángulos especiales, todos ubicados en el primer cuadrante. ¿Estarán relacionados con los valores de las relaciones trigonométricas en los demás cuadrantes?

Primero, notemos que $x > 0$ para los puntos en el I y IV cuadrante, y $x < 0$ en el II y III cuadrante, por lo que, por la definición del coseno, tenemos que $cos(\alpha) > 0$, si α pertenece al I cuadrante o α pertenece al IV cuadrante; y $cos(\alpha) < 0$, si α pertenece al II cuadrante o α pertenece al III cuadrante.

De manera muy similar, $y > 0$ para los puntos en el I y II cuadrante, mientras que $y < 0$ en el III y IV cuadrante. Por lo que, por la definición del seno, tenemos que $sen(\alpha) > 0$, si α pertenece al I cuadrante o α pertenece al II cuadrante; y $sen(\alpha) < 0$, si α pertenece al III cuadrante o α pertenece al IV cuadrante.

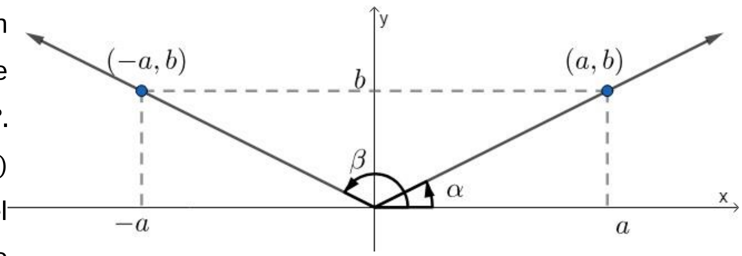
Si recordamos que $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$ tenemos que $tg(\alpha) > 0$, si α pertenece al I cuadrante o α pertenece al III cuadrante; y $tg(\alpha) < 0$, si α pertenece al II cuadrante o α pertenece al IV cuadrante.

En resumen



Reducción del II al I cuadrante

Supongamos que tenemos un ángulo $\beta \in II$ cuadrante y un ángulo $\alpha \in I$ cuadrante, de manera que $\alpha + \beta = 180°$. Notemos que si el punto (a, b) está en el lado terminal del ángulo α, entonces el punto $(-a, b)$ está en el lado terminal del ángulo β, y que l vale igual en ambos casos, ya que



$$\sqrt{a^2 + b^2} = l = \sqrt{(-a)^2 + b^2}$$

Entonces, tenemos que

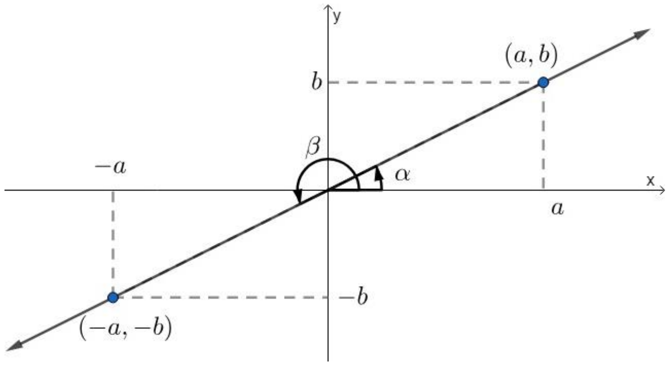
$$sen(\beta) = \frac{b}{l} = sen(\alpha)$$

$$cos(\beta) = -\frac{a}{l} = -cos(\alpha)$$

$$tg(\beta) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} = -tg(\alpha)$$

Reducción del III al I cuadrante

Supongamos que tenemos un ángulo $\beta \in III$ cuadrante y un ángulo $\alpha \in I$ cuadrante, de manera que $\beta - \alpha = 180°$. Notemos que si el punto (a, b) está en el lado terminal del ángulo α, entonces el punto $(-a, -b)$ está en el lado terminal del ángulo β, y que l vale igual en ambos casos, ya que



$$\sqrt{a^2 + b^2} = l = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$$

Es decir,

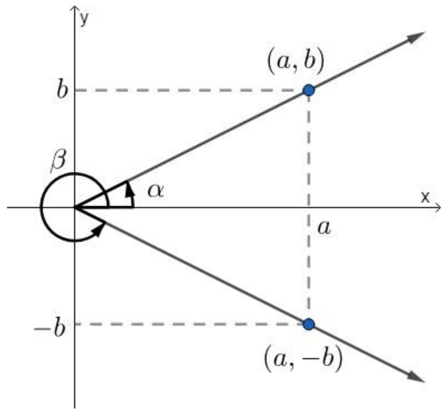
$$sen(\beta) = -\frac{b}{l} = -sen(\alpha)$$

$$cos(\beta) = -\frac{a}{l} = -cos(\alpha)$$

$$tg(\beta) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = tg(\alpha)$$

Reducción del IV al I cuadrante

Supongamos que tenemos un ángulo $\beta \in IV$ cuadrante y un ángulo $\alpha \in I$ cuadrante, de manera que $\alpha + \beta = 360°$. Notemos que si el punto (a, b) está en el lado terminal del ángulo α, entonces el punto $(a, -b)$ está en el lado terminal del ángulo β, y que l vale igual en ambos casos, ya que



$$\sqrt{a^2 + b^2} = l = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$$

Por lo tanto,

$$sen(\beta) = -\frac{b}{l} = -sen(\alpha)$$

$$cos(\beta) = \frac{a}{l} = cos(\alpha)$$

$$tg(\beta) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -tg(\alpha)$$

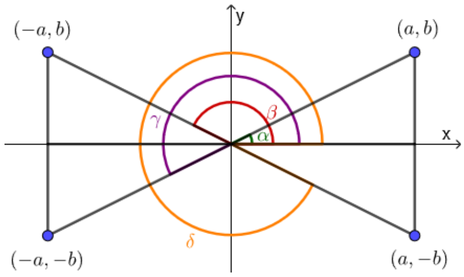
Luego, si tenemos que calcular las relaciones trigonométricas de algún ángulo β que no pertenece al I cuadrante, podemos graficarlo y pensar cuál es la relación que tiene con un ángulo α que sí pertenece al I cuadrante y, de esta manera, deducir el valor de las relaciones trigonométricas para el ángulo β.

Notemos que las relaciones con el ángulo del primer cuadrante siempre se pueden calcular sumando o restando $180°$ o $360°$ y ninguna se obtiene sumando o restando $90°$ o $270°$.

En resumen, si α pertenece al primer cuadrante, tenemos

β en el segundo cuadrante, tal que $\alpha+\beta=180°$	$sen(\beta)=sen(\alpha)$ $cos(\beta)=-cos(\alpha)$ $tg(\beta)=-tg(\alpha)$
β en el tercer cuadrante, tal que $\beta-\alpha=180°$	$sen(\beta)=-sen(\alpha)$ $cos(\beta)=-cos(\alpha)$ $tg(\beta)=tg(\alpha)$
β en el cuarto cuadrante, tal que $\alpha+\beta=360°$	$sen(\beta)=-sen(\alpha)$ $cos(\beta)=cos(\alpha)$ $tg(\beta)=-tg(\alpha)$

Es decir, que si $a,b>0$ y tenemos los puntos (a,b), $(a,-b)$, $(-a,-b)$ y $(a,-b)$, que determinan los ángulos α, β, γ y δ como en la siguiente figura



sabemos que los valores de las relaciones trigonométricas de los ángulos solamente van a ser distintos en el signo. Para esto es bueno recordar los signos de las relaciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes o deducirlos pensando en el signo de las coordenadas de un punto terminal.

Calcular el valor del seno y del coseno del ángulo de $240°$.

Lo primero que podemos deducir es que, como $180° < 240° < 270°$, *el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante, entonces, para calcular el ángulo correspondiente al primer cuadrante debemos restarle* $180°$. *Tenemos entonces*

$$240° - 180° = 60°$$

Además, al ser un ángulo del tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno son negativos, tenemos entonces

$$sen(240°) = -sen(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos(240°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}$$

Encontrar un ángulo α del segundo cuadrante que verifique la ecuación

$$5tg^2(\alpha) + tg(\alpha) - 4 = 0.$$

Expresar α en radianes.

Tenemos una ecuación cuadrática, donde la incógnita es $tg(\alpha)$. Podemos usar la sustitución $t = tg(\alpha)$ para, así, obtener

$$5t^2 + t - 4 = 0$$

Por medio de la fórmula de Bhaskara, tenemos que $t_1 = -1$ y $t_2 = \frac{4}{5}$, es decir

$$tg(\alpha) = -1 \quad o \quad tg(\alpha) = \frac{4}{5}.$$

Ahora bien, como α pertenece al segundo cuadrante, sabemos que su tangente debe ser negativa, entonces, $tg(\alpha) = -1$.

Por la tabla de valores de ángulos conocidos, sabemos que $tg(45°) = 1$, entonces, debemos conseguir el ángulo correspondiente a $45°$ en el segundo cuadrante. Para ello le restamos al ángulo de $180°$ el de $45°$.

Tenemos, entonces, que el ángulo buscado mide $135°$ o, en radianes, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Actividades

22. Calcular las razones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos indicando, en cada caso, con qué ángulo del primer cuadrante se relaciona

a) $135°$ b) $240°$ c) $300°$

d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $-\frac{\pi}{3}$ f) $\frac{7}{4}\pi$

23. Hallar todos los ángulos comprendidos entre $0°$ y $360°$ que verifican que $cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

24. Hallar todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π que verifican que

$$|sen(\alpha)| = 1.$$

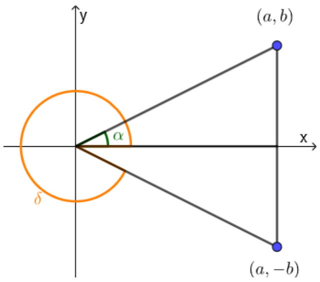
25. Encontrar los valores de α tales que $0° \leq \alpha \leq 360°$ y

$$4\, cos^2(\alpha) = 3 - 4cos(\alpha)$$

26. Encontrar el ángulo $t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ que satisfaga

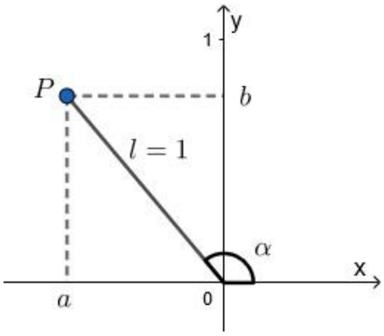
$$2\, sen^2(t) - 5\, sen(t) = 3$$

27. Si α y δ son los ángulos de la siguiente figura, y sabiendo que $tg(\delta) = -\frac{3}{4}$ y que $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$, encontrar las restantes relaciones trigonométricas para α y δ.



Circunferencia unitaria

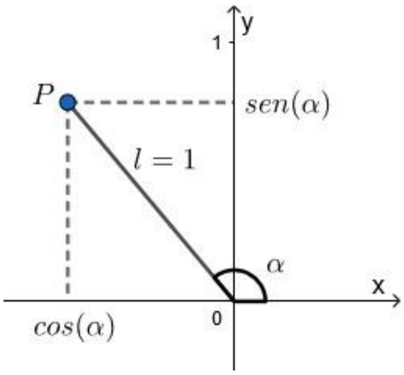
¿Cuáles serán las coordenadas de un punto ubicado en el lado terminal de un ángulo α dado en posición normal, si tenemos que $l = 1$?



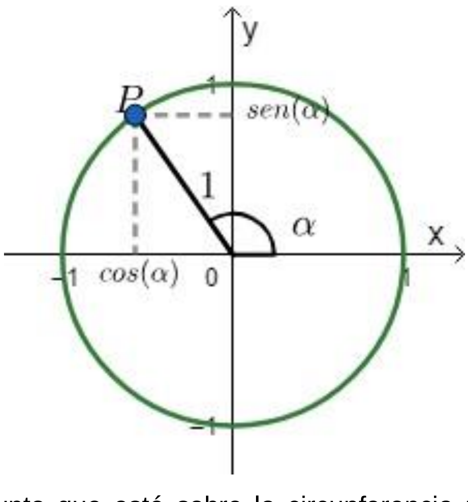
Estamos buscando las coordenadas de un punto (a, b) y sabemos que $sen(\alpha) = \frac{b}{l}$ por lo que, dado que $l = 1$, tenemos que $b = sen(\alpha)$.

De manera análoga, sabemos que $\cos(\alpha) = \frac{a}{l}$ de lo que deducimos que $a = \cos(\alpha)$. Es decir, el punto P del lado terminal del ángulo α es $(\cos(\alpha), sen(\alpha))$ cuando $l = 1$.

Gráficamente, tenemos que



Notemos que, como este punto está a distancia 1 del origen, pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Si graficamos el punto y la circunferencia, obtenemos



Es decir, que cualquier punto que esté sobre la circunferencia unitaria se puede escribir como $(\cos(\alpha), sen(\alpha))$ para algún $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Actividades

28. Hallar un punto sobre la circunferencia unitaria que esté determinado por un ángulo de $\frac{3}{4}\pi$ dado en posición normal.
29. El punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ¿pertenece a la circunferencia unitaria? ¿Por qué ángulo en posición normal está dado?

Seno y coseno de la suma de dos ángulos conocidos

En ocasiones precisamos calcular las relaciones trigonométricas de ángulos que son suma o diferencia de ángulos de los cuales conocemos sus relaciones trigonométricas.

Como ejemplo, si queremos obtener el valor de $cos(75°)$, podemos notar que $75° = 30° + 45°$. Además, las relaciones trigonométricas de $30°$ y $45°$ son simples de calcular.

Esto significa que puede ser de gran ayuda (y lo será en diversas ramas de la matemática) tener expresiones para $cos(\alpha + \beta)$ y $sen(\alpha + \beta)$ a partir de las propias para α y β por separado.

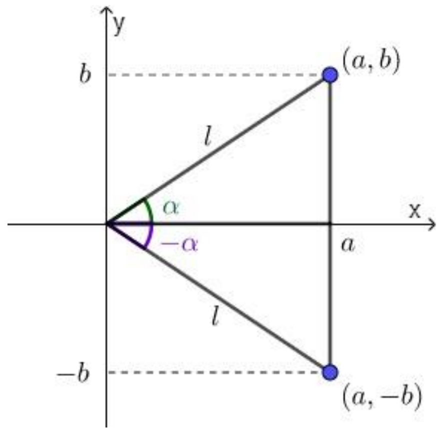
No haremos las demostraciones de las deducciones de estas fórmulas, pero si estás interesado en verlas, se pueden hallar en libros de matemática.

Dados α y β dos ángulos cualesquiera, se tiene que

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).cos(\beta) + cos(\alpha).sen(\beta)$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta)$$

Para deducir la fórmula para el seno o el coseno de la resta, primero notemos lo siguiente: si tomamos el ángulo α y un punto del lado terminal con coordenadas (a, b), tenemos que el ángulo $-\alpha$ tiene en el lado terminal al punto $(a, -b)$. Y, en ambos casos, l vale lo mismo, ya que $l = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$



Entonces,

$$sen(-\alpha) = \frac{-b}{l} = -\left(\frac{b}{l}\right) = -sen(\alpha)$$

$$cos(-\alpha) = \frac{a}{l} = cos(\alpha)$$

Por estas propiedades suele decirse que el seno es una relación impar, y que el coseno es par. Estos nombres hacen referencia a la simetría de las gráficas, y este tema se estudiará con más detalle en Matemática A.

Ahora, podemos deducir la fórmula del seno de la resta, pensando en la resta de un número como la suma de su opuesto

$$\begin{aligned} sen(\alpha - \beta) &= sen\big(\alpha + (-\beta)\big) \\ &= sen(\alpha).cos(-\beta) + cos(\alpha).sen(-\beta) \\ &= sen(\alpha).cos(\beta) - cos(\alpha).sen(\beta) \end{aligned}$$

Y, de manera análoga,

$$\begin{aligned} cos(\alpha - \beta) &= cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= cos(\alpha).cos(-\beta) - sen(\alpha).sen(-\beta) \\ &= cos(\alpha).cos(\beta) + sen(\alpha).sen(\beta) \end{aligned}$$

También podemos aplicar estas propiedades para obtener el seno y coseno del doble de un ángulo

$$\begin{aligned} sen(2\alpha) &= sen(\alpha + \alpha) \\ &= sen(\alpha).cos(\alpha) + cos(\alpha).sen(\alpha) \\ &= 2.sen(\alpha).cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(2\alpha) &= cos(\alpha + \alpha) \\ &= cos(\alpha).cos(\alpha) - sen(\alpha).sen(\alpha) \\ &= cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \end{aligned}$$

Actividades

30. Demostrar que:
    a) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos(\alpha)$
    b) $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen(\alpha)$
    c) $sen(\pi-\alpha)=sen(\alpha)$
    d) $cos(\pi+\alpha)=-cos(\alpha)$
31. Escribir los ángulos como suma o resta de ángulos (cuyas relaciones trigonométricas sean conocidas) y, aplicando las relaciones correspondientes, calcular:
    a) $sen(15°)\ =\ sen(60°-45°)$ (se puede utilizar 60° y 45° $\text{o } 45° \text{ y } 30°, \text{etc}$)
    b) $cos(75°)$
    c) $sen(165°)$
    d) $tg(300°)$
32. Hallar, explicitando todos los cálculos, el valor exacto de las siguientes expresiones:
    a) $[tg^2(30°)+\ cos^2(60°)-sec^2(30°)].3.sen(150°)+cos^2(105°)$
    b) $2.sen(105°)+cos(2220°)-tg(315°)$
    c) $tg(1215°)+sen^2(300°)$

Identidades trigonométricas

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen relaciones trigonométricas y es válida para cualquier valor del ángulo en los que están definidas las relaciones.

Identidad Pitagórica o trigonométrica fundamental

La más importante de las identidades trigonométricas es la que se conoce con el nombre de **Identidad trigonométrica fundamental**, o **Identidad Pitagórica** y que dice que, para todo valor de α, se cumple la siguiente igualdad:

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Se utiliza la notación $sen^2(\alpha)$ para representar $\left(sen(\alpha)\right)^2$, que no es lo mismo que $sen(\alpha^2)$

Veamos de dónde se deduce esta fórmula: sabemos que $sen(\alpha) = \frac{b}{l}$ y que $cos(\alpha) = \frac{a}{l}$, con $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, de donde tenemos

$$sen^2(\alpha) = \left(sen(\alpha)\right)^2 = \left(\frac{b}{l}\right)^2 = \frac{b^2}{l^2}$$

$$cos^2(\alpha) = (cos(\alpha))^2 = \left(\frac{a}{l}\right)^2 = \frac{a^2}{l^2}$$

Si ahora sumamos ambas igualdades y reemplazamos l, obtenemos que

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = \frac{b^2}{l^2} + \frac{a^2}{l^2} = \frac{b^2 + a^2}{l^2} = \frac{b^2 + a^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Esta relación entre el seno y el coseno del mismo ángulo es muy útil y de la misma se pueden deducir dos igualdades que nos ayudan a conocer el valor del seno de un ángulo sabiendo su coseno y en qué cuadrante está ubicado, o del coseno del ángulo conociendo el valor de su seno y el cuadrante en que está ubicado:

$$sen^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha) \qquad\qquad cos^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha)$$

Además, dado que la suma de los cuadrados de ambas relaciones es 1, ninguno de los cuadrados puede superar a 1. Es decir, $sen^2(\alpha) \leq 1$ y $cos^2(\alpha) \leq 1$. Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros, obtenemos que $|sen(\alpha)| \leq 1$ y $|cos(\alpha)| \leq 1$. De lo que podemos deducir nuevamente las desigualdades:

$$-1 \leq sen(\alpha) \leq 1 \qquad\qquad -1 \leq cos(\alpha) \leq 1$$

Sabiendo que $\alpha \in III$ *cuadrante y que* $cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ *calcular el valor de* $sen(\alpha)$.

Tenemos que $sen^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha) = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

Entonces, $|sen(\alpha)| = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Como sabemos que $\alpha \in III$ *cuadrante, tenemos que* $sen(\alpha) < 0$ *y, entonces,* $sen(\alpha) = -\frac{4}{5}$.

Sabiendo que $\alpha \in$ *II cuadrante y que* $sec(\alpha) = -3$, *averiguar el resto de las relaciones trigonométricas.*

Como $sec(\alpha) = -3$ *y* $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$ *tenemos que* $cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$.

Por medio de la identidad Pitagórica, tenemos que

$$sen^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha) = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Entonces, $|sen(\alpha)| = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. *Como sabemos que* $\alpha \in$ *II cuadrante,* $sen(\alpha) > 0$, *y tenemos que* $sen(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ *y* $cosec(\alpha) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Por último, $tg(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}/3}{-1/3} = -2\sqrt{2}$ *y* $cotg(\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Sabiendo que $tg(\alpha) = 7$, *y que* α *pertenece al III cuadrante, hallar* $sen(\alpha)$ *y* $cos(\alpha)$.

Como $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = 7$, *sabemos que* $sen(\alpha) = 7\,cos(\alpha)$.

Por otro lado, utilizando la identidad Pitagórica sabemos que

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1.$$

Si en esta última ecuación reemplazamos $sen(\alpha)$ *por* $7\,cos(\alpha)$, *obtenemos:*

$$(7\,cos(\alpha))^2 + cos^2(\alpha) = 1$$

$$49\,cos^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$50\,cos^2(\alpha) = 1$$

$$cos^2(\alpha) = \frac{1}{50}$$

$$|cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Como α *es un ángulo del III cuadrante, sabemos que* $cos(\alpha) < 0$ *y, por lo tanto, tenemos que*

$$cos(\alpha) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Finalmente, como $sen(\alpha) = 7\,cos(\alpha)$, *tenemos que*

$$sen(\alpha) = 7\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Actividades

33. Si $cos(\beta) = \frac{1}{7}$ y β pertenece al IV cuadrante, calcular $sen(\beta)$.

34. Si $sen(x) = \frac{1}{3}$ y $cos(x) < 0$, calcular el valor exacto de $cos(x)$ y de $tg(x)$.

35. Si α es un ángulo agudo y el $sen(\alpha) = \frac{2}{7}$, encontrar los valores de las demás relaciones trigonométricas de α.

36. Sea β un ángulo del cuarto cuadrante, tal que $cotg(\beta) = -5$. Calcular las restantes relaciones trigonométricas.

37. Determinar las relaciones seno, coseno y tangente del ángulo θ del cuarto cuadrante que satisface la ecuación

$$5\,cos^2(\theta) + cos(\theta) = sen^2(\theta)$$

38. Determinar los valores de θ en el intervalo $[0, \pi]$, tales que

$$-\,cos(\theta)\,[tg(\theta) + cotg(\theta)] = -\sqrt{2}$$

Otras identidades trigonométricas

Partiendo de las definiciones de las relaciones trigonométricas y de la identidad fundamental, podemos obtener más identidades trigonométricas.

Por ejemplo, para los valores de α donde $cos(\alpha) \neq 0$, podemos dividir por $cos^2(\alpha)$ todos los términos de la identidad fundamental y así obtener:

$$\frac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} + \frac{cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$$

Operando y simplificando, obtenemos

$$\left(\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{cos(\alpha)}\right)^2$$

$$tg^2(\alpha) + 1 = sec^2(\alpha)$$

Si, ahora, en vez de dividir por $cos^2(\alpha)$, dividimos por $sen^2(\alpha)$, para los valores de α donde $sen(\alpha) \neq 0$ y operamos de manera análoga, tenemos que

$$\frac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} + \frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \frac{1}{sen^2(\alpha)}$$

$$1 + \left(\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{1}{sen(\alpha)}\right)^2$$

$$1 + cotg^2(\alpha) = cosec^2(\alpha)$$

De esta manera, podemos tener numerosas identidades trigonométricas.

Mostrar que

$$\left(1-sen^2(\alpha)\right).\left(1+cotg^2(\alpha)\right)+1=cosec^2(\alpha)$$

Tenemos

$$\left(1-sen^2(\alpha)\right).\left(1+cotg^2(\alpha)\right)+1=cos^2(\alpha)\left(1+\frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}\right)+1$$

$$=cos^2(\alpha)\left(\frac{sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}\right)+1$$

$$=cos^2(\alpha)\left(\frac{1}{sen^2(\alpha)}\right)+1=\frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}+1$$

$$=\frac{cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{1}{sen^2(\alpha)}$$

$$=cosec^2(\alpha)$$

Mostrar que

$$tg(\alpha)+cotg(\alpha)=sec(\alpha)\,.\,cosec(\alpha)$$

Tenemos

$$tg(\alpha)+cotg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}=\frac{sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{cos(\alpha)\,.\,sen(\alpha)}$$

$$=\frac{1}{cos(\alpha)\,.\,sen(\alpha)}=\frac{1}{cos(\alpha)}\cdot\frac{1}{sen(\alpha)}$$

$$=sec(\alpha)\,.\,cosec(\alpha)$$

Actividades

39.Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\frac{sen^4(\alpha)-COS^4(\alpha)}{1-2cos^2(\alpha)}=1$

b) $cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

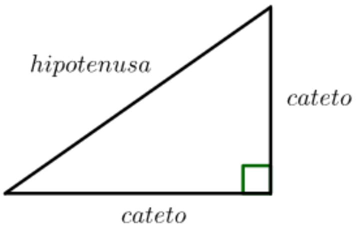
c) $\frac{1}{2}\left(\frac{1+sen(\theta)}{cos(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{1+sen(\theta)}\right)=sec(\theta)$

d) $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}=sen^2(\alpha)$

e) $1+tan^2(\alpha)=sec^2(\alpha)$

Triángulos rectángulos

Como ya hemos visto, un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un ángulo recto. Sus lados reciben nombres especiales: la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto, mientras que los **catetos** son los lados que forman el ángulo recto.



Recordemos que para triángulos rectángulos ya hemos visto el Teorema de Pitágoras que proporciona una relación entre las medidas de los catetos y la medida de la hipotenusa.

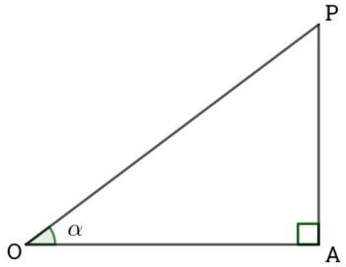
Será útil repasar el Teorema de triángulos semejantes que encontrarás en el anexo del capítulo 3.

Otra propiedad importante es la siguiente:

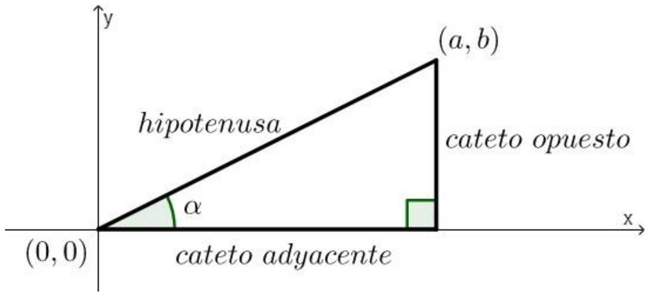
> La suma de los ángulos internos de un triángulo vale $180°$.

En un triángulo rectángulo pueden establecerse ciertas relaciones entre un ángulo agudo y sus lados.

Si graficamos un triángulo de vértices O, A y P, como en la siguiente figura, y marcamos el ángulo α, veremos cómo podemos obtener las relaciones trigonométricas de α como un cociente de los lados del triángulo.



Si ubicamos, ahora, un vértice del triángulo rectángulo en el $(0{,}0)$, un cateto apoyado sobre el eje x positivo, al que llamaremos **cateto adyacente** al ángulo α y el otro cateto paralelo al eje y positivo, al que llamaremos **cateto opuesto** al ángulo α, tenemos



Si (a, b) es el vértice del triángulo marcado en la figura, podemos ver que la longitud del cateto adyacente coincide con el valor de a, y la longitud del cateto opuesto coincide con el valor de b, a la vez que la longitud de la hipotenusa es $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Utilizando las relaciones trigonométricas que ya vimos con las coordenadas del punto, deducimos ahora que

$$sen(\alpha) = \frac{b}{l} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos(\alpha) = \frac{a}{l} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tg(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

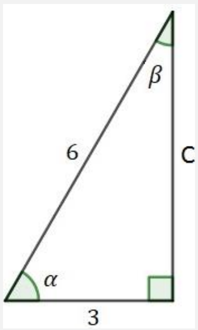
Estas mismas relaciones valen si el triángulo rectángulo no está ubicado en esa posición.

El Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas nos permitirán, una vez conocidos algunos de los lados o de los ángulos de un triángulo rectángulo, hallar los restantes; es decir, resolver el triángulo.

Veamos algunos ejemplos a modo de explicación.

Resolver el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 6 cm y uno de sus catetos 3 cm.

Para resolver el problema, podemos representar el triángulo, del cual no conocemos dos de sus ángulos, que llamaremos α y β y uno de sus catetos, que llamaremos C. Las medidas del otro cateto y la hipotenusa están dadas en el enunciado. Observemos que es indistinto cuál de los dos catetos tomamos como el de valor conocido. Obtenemos, así, la figura



Debemos calcular la longitud del cateto opuesto a α, es decir C y también los ángulos α y β.

Por el Teorema de Pitágoras, sabemos que $3^2 + C^2 = 6^2$, de donde

$$C = \sqrt{(6)^2 - (3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ cm.$$

Para calcular α, podemos utilizar la relación $cos(\alpha) = \frac{C}{H}$, de donde

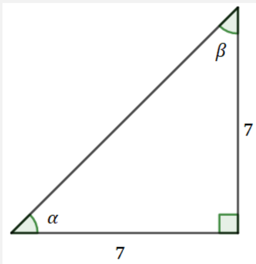
$$cos(\alpha) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

y por las relaciones trigonométricas en ángulos especiales sabemos que $\alpha = 60°$, o expresado en radianes es $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Para calcular el valor de β, podemos utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, con lo que $\beta = 180° - 90° - 60° = 30°$, o sea $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Como sabemos que α es un ángulo agudo, solo existe un valor de α, tal que $cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Resolver el triángulo rectángulo cuyos catetos miden, ambos, $7\ cm$.



Si llamamos CA al cateto adyacente a α, CO al cateto opuesto a α, y H a la hipotenusa del triángulo, tenemos que $CA = CO = 7\ cm$. Y debemos calcular H, α y β.

Sabemos que

$$H^2 = (CA)^2 + (CO)^2 = (7)^2 + (7)^2 = 2.(7)^2$$

de donde $H = 7\sqrt{2}\ cm$.

Para calcular α, podemos utilizar que

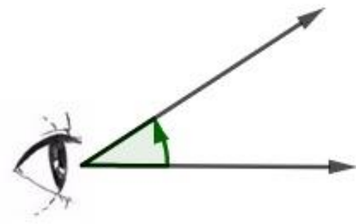
$$tg(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{7}{7} = 1,$$

de donde $\alpha = 45°$ o, en radianes, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Utilizando la propiedad de la suma de ángulos interiores, tenemos que $\beta = 45°$,es decir, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

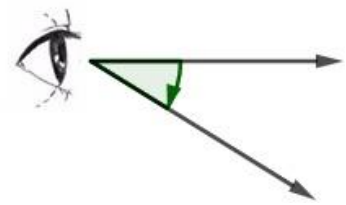
Problemas de aplicación

Las identidades trigonométricas y propiedades de triángulos rectángulos serán muy útiles para la resolución de problemas de situaciones reales simples. En muchos de los problemas tendremos que tener en cuenta ciertas convenciones y definiciones. Presentaremos, a continuación, algunas de ellas.

El ángulo que forma la visual con el plano horizontal que pasa por el ojo del observador se llama **ángulo de elevación**, si el punto observado está por encima de dicho plano; o **ángulo de depresión**, si el punto está por debajo.



Ángulo de elevación

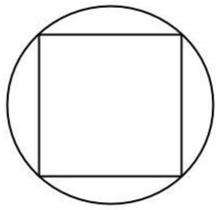


Ángulo de depresión

⚠ En los problemas en los que haya un observador, se considera el ángulo al ras del suelo (se desprecia la altura del hombre).

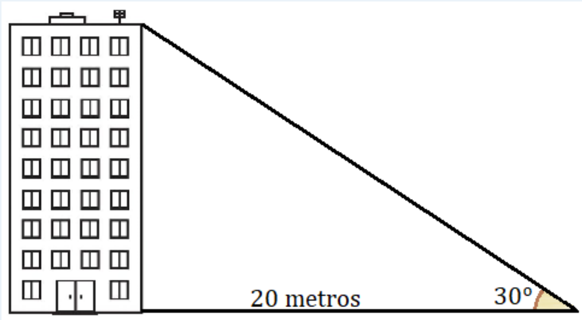
En algunos ejercicios debemos hallar longitudes de los lados de polígonos inscriptos en una circunferencia. Eso significa que los vértices del polígono están sobre la circunferencia.

Por ejemplo, el cuadrado de la figura de la derecha está inscripto en una circunferencia.



Se necesita saber la altura de un edificio del que se sabe que un observador ubicado a 20 metros de la base ve la altura del mismo con un ángulo de elevación de $30°$.

Para este tipo de problemas es recomendable hacer un gráfico esquemático y volcar en él los datos dados, nombrando también la variable que representa el dato que queremos averiguar. En nuestro caso, tenemos



Si E es la incógnita que mide la altura del edificio, tenemos que

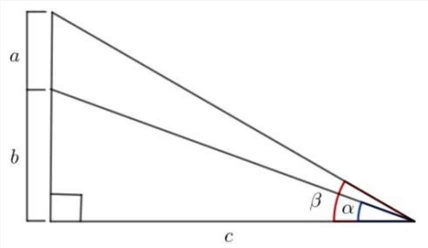
$$tg(30°) = \frac{E}{20}$$

por lo que $\frac{\sqrt{3}}{3}.20 = E$. Es decir, la altura del edificio es de $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ metros.

Notemos que este mismo ejercicio se podría haber resuelto averiguando primero el valor de la hipotenusa (usando $cos(30°)$), y luego la altura del edificio utilizando el Teorema de Pitágoras. Ambas maneras de resolver son válidas y, por lo general, no va a haber una única manera de llegar al resultado correcto.

Veamos, ahora, un ejemplo un poco más complejo, donde aplicaremos un sistema de ecuaciones para resolverlo.

Consideramos la situación geométrica de la figura dada y conocemos los siguientes valores: $a = 20, \alpha = 30°$ y $\beta = 45°$. Estamos interesados en conocer los valores de b y de c.



Podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} tg(30°) = \dfrac{b}{c} \\ tg(45°) = \dfrac{20+b}{c} \end{cases}$$

Reemplazando los valores conocidos, tenemos que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{c} \\ 1 = \dfrac{20+b}{c} \end{cases}$$

Tenemos, entonces, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que podemos resolverlo con lo visto en el capítulo 3,

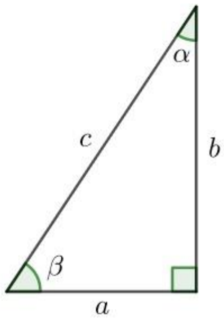
$$\begin{cases} c = \sqrt{3}b \\ c = 20 + b \end{cases}$$

Entonces, $\sqrt{3}b = 20 + b$, por lo que

$$b = \frac{20}{\sqrt{3}-1} \quad \text{y} \quad c = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Actividades

40. Dado el triángulo rectángulo de la figura, obtener el valor de todos los lados y todos los ángulos en cada una de las siguientes situaciones propuestas.



a) $\alpha = 30°, b = 1$

b) $\beta = 30°, c = 1$

c) $\alpha = 45°, a = 1$

d) $\beta = 45°, c = 9$

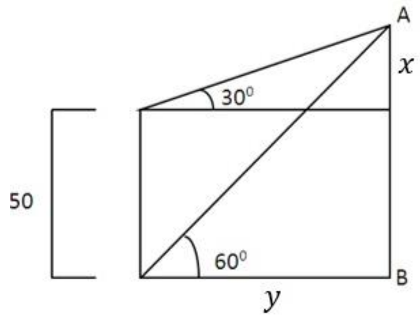
e) $\beta = 75°, a = 4$

41. Una hormiga observa, con un ángulo de elevación de $60°$, la altura de una persona que mide $1{,}80$ metros. ¿A qué distancia está la hormiga de la persona?

42. Un helicóptero que está volando en línea recta a una altitud constante de 340 metros, pasa por encima de un punto de observación A ubicado en el suelo. Después de un minuto, el ángulo de elevación de A al helicóptero es de $60°$. ¿Qué distancia recorrió el helicóptero en ese minuto? Determinar la velocidad del helicóptero en kilómetros por hora.

43. Una antena de radio está sujeta al suelo por un cable a cada lado, que forman con la antena ángulos de $45°$ y $60°$. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena. La distancia entre los puntos de sujeción de los cables es de $120\ m$. Calcular la altura de la antena y la distancia de la misma a cada punto de sujeción.

44. Determinar la medida del segmento AB.



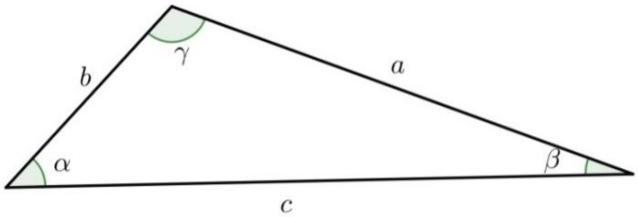
45. Un faro de 30 metros de altura se encuentra ubicado sobre un acantilado. Si desde un barco, en un instante dado, se observa el extremo y la base del faro con ángulos de elevación de $45°$ y de $30°$ respectivamente, determinar a qué distancia se encuentra el barco de la perpendicular que contiene al eje del faro. Graficar la situación y justificar.

Triángulos no rectángulos

Hay situaciones problemáticas cuyo planteo matemático se corresponde con un triángulo que no es rectángulo y, por lo tanto, no podríamos resolverlas con las herramientas vistas hasta el momento. Por este motivo, estudiaremos unos teoremas a los que llamamos Teorema del Seno y Teorema del Coseno. En la resolución, es necesario plantear con precisión cuáles son los datos y cuáles las incógnitas, para luego relacionarlas a través de los teoremas.

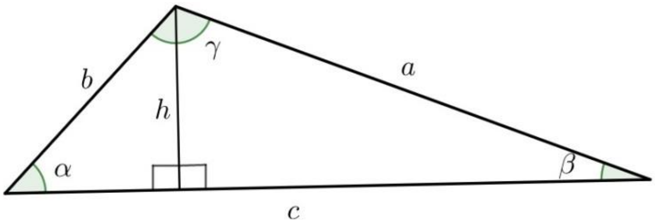
No hay una única manera de resolver triángulos. Lo que sí puede ocurrir es que algún camino sea más sencillo que otro, por permitir obtener el resultado con mayor rapidez.

Para enunciar los teoremas, nombraremos las longitudes de los lados y los ángulos del triángulo de la siguiente manera:



donde a es el lado opuesto al ángulo α, b es el lado opuesto al ángulo β, y c es el lado opuesto al ángulo γ.

Marcaremos la altura del triángulo perpendicular a cualquiera de los lados, y la llamaremos h. Nos quedan, entonces, determinados dos triángulos rectángulos.



Con esta situación planteada deducimos y enunciamos ambos teoremas.

Teorema del Seno

A partir de los visto para triángulos rectángulos, podemos observar que h se puede calcular de varias maneras. Por ejemplo,

$$h = b.sen(\alpha)$$

$$h = a.sen(\beta)$$

Lo que significa que igualando tenemos $b.sen(\alpha) = a.sen(\beta)$, de lo que se deduce que

$$\frac{b}{sen(\beta)} = \frac{a}{sen(\alpha)}$$

Si ahora consideramos el triángulo de manera tal que la base sea a, llegamos a una relación similar entre b, c, $sen(\beta)$ y $sen(\gamma)$. Se deja como ejercicio probar esto.

Notemos que $sen(\alpha) \neq 0$, ya que $\alpha \neq 0°$ y $\alpha \neq 180°$ por tratarse de un ángulo interior de un triángulo. Lo mismo ocurre con β y γ.

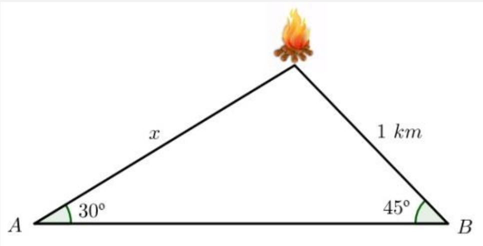
Lo que se obtiene es una relación entre los lados del triángulo con sus ángulos opuestos. Este resultado se conoce como **Teorema del Seno.**

Teorema del Seno:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

siendo a el lado opuesto al ángulo α, b el lado opuesto al ángulo β y c el lado opuesto al ángulo γ.

Dos guardabosques, A y B, descubren la misma fogata clandestina. En la figura se indica la dirección en la que cada guardabosques observa la fogata desde su posición. Si el guardabosques B se encuentra a $1\ km$ de la fogata. ¿A qué distancia de la fogata se encuentra el guardabosques A?



Sabemos que la distancia entre el guardabosques B y la fogata es de $1\ km$, y queremos averiguar la distancia desde el guardabosques A a la fogata. Llamaremos x a esa distancia medida en km.
Por medio del Teorema del Seno, podemos plantear que

$$\frac{x}{sen(45°)} = \frac{1}{sen(30°)}$$

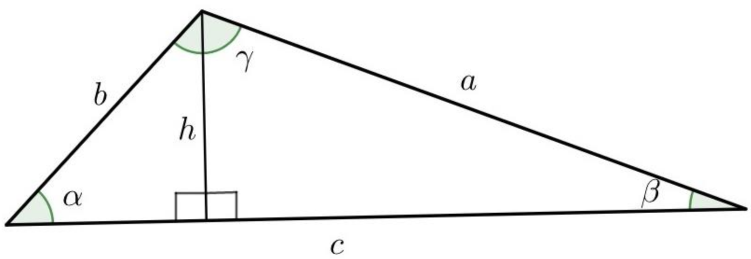
y reemplazando por los valores del seno conocidos, tenemos que

$$x = \frac{1.\frac{\sqrt{2}}{2}}{1/2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

tenemos, entonces, que el guardabosques A está a $\sqrt{2}\ km$ de la fogata.

Teorema del Coseno

Ahora, analizando nuevamente el mismo triángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y relacionar h con a, b y c.



Notemos que el lado adyacente a β en el triángulo rectángulo de la derecha de la figura mide $a.cos(\beta)$. De donde el lado adyacente a α en el triángulo rectángulo de la izquierda mide $c - a.cos(\beta)$.

Se cumple que

$$b^2 = h^2 + (c - a.cos(\beta))^2$$

Por otro lado, tenemos que

$$a^2 = h^2 + (a.cos(\beta))^2$$

Igualando las expresiones para h^2, tenemos

$$b^2 - (c - a.cos(\beta))^2 = a^2 - a^2.cos^2(\beta)$$

Desarrollando el cuadrado, llegamos a la expresión

$$b^2 - c^2 + 2ac.cos(\beta) - a^2\,cos^2(\beta) = a^2 - a^2.cos^2(\beta)$$

en la cual, simplificando y despejando b^2, obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos(\beta).$$

De manera análoga, podemos obtener los valores de a^2 y de c^2, hallando

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos(\gamma)$$

Este resultado es conocido como **Teorema del Coseno**.

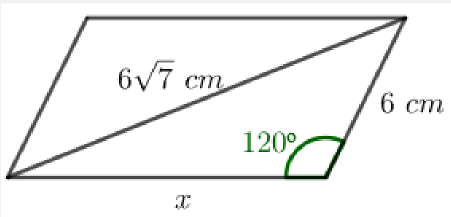
Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$$

donde a es el lado opuesto del ángulo α.

Un paralelogramo tiene una diagonal mayor que mide $6\sqrt{7}$ cm. El ángulo opuesto a la diagonal mayor es de $120°$. Si el lado menor mide 6 cm, determinar el lado mayor y la diagonal menor.

Primero, haremos un dibujo y volcaremos los datos que tenemos, llamaremos x a la longitud del lado restante.



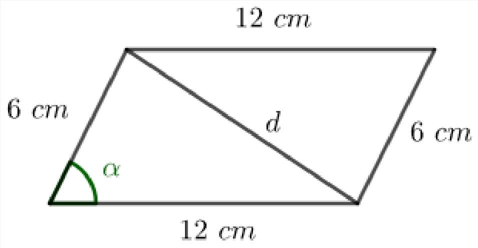
Si aplicamos el Teorema del Coseno al triángulo con lados $a = 6\sqrt{7}$, $b = 6$, $c = x$ y $\alpha = 120°$, sabiendo que $cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}$, tenemos

$$\left(6\sqrt{7}\right)^2 = (6)^2 + (x)^2 - 2.6.x.cos(120°)$$
$$252 = 36 + x^2 + 6x$$

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

Resolviendo esta ecuación conseguimos que $x = 12$ o $x = -18$. Como x es una longitud, no puede ser negativa, por lo tanto $x = 12\ cm$.

Ahora queremos averiguar la diagonal menor. Con los datos que ya tenemos, podemos dibujar



Sabemos que ahora $\alpha = 60°$, ya que es suplementario a $120°$. $b = 6$, $c = 12$ y queremos averiguar d.

Tenemos, entonces

$$(d)^2 = (6)^2 + (12)^2 - 2.6.12.cos(60°)$$

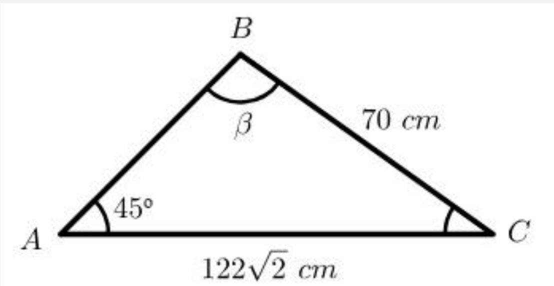
$$d^2 = 36 + 144 - 72$$

$$d = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Notar que solo tomamos la raíz positiva, ya que d es una longitud.

Entonces, la diagonal menor mide $6\sqrt{3}\ cm$.

¿Se puede construir un triángulo ABC de modo que el ángulo A mida $45°$, el lado $\overline{AC}$ mida $122\sqrt{2}\ cm$ y el lado $\overline{BC}$ mida $70\ cm$?



De acuerdo a la figura, podemos aplicar el Teorema del Seno para calcular el valor del ángulo β.

Tenemos, entonces, que

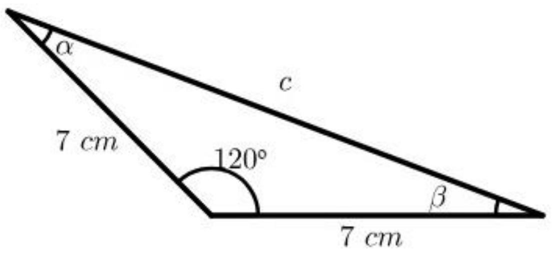
$$\frac{70}{sen(45°)} = \frac{122\sqrt{2}}{sen(\beta)}$$

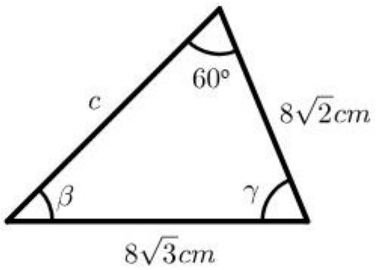
De donde $sen(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{122\sqrt{2}}{70} = \frac{122}{70} = \frac{61}{35} > 1$, y como sabemos que $-1 \leq sen(\beta) \leq 1$, no existe valor de β que cumpla el teorema.

Tenemos, entonces, que no se puede construir un triángulo con los datos pedidos.

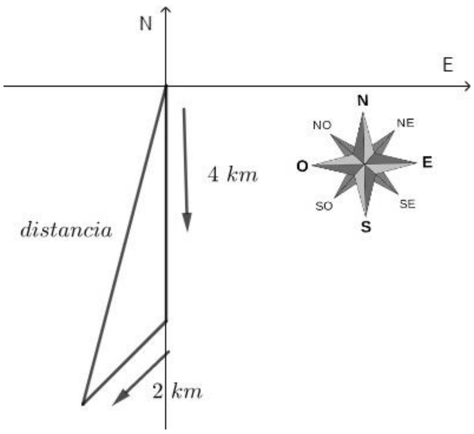
Actividades

46. Hallar las medidas de los lados y ángulos que faltan, determinando en cada caso el teorema que conviene utilizar:

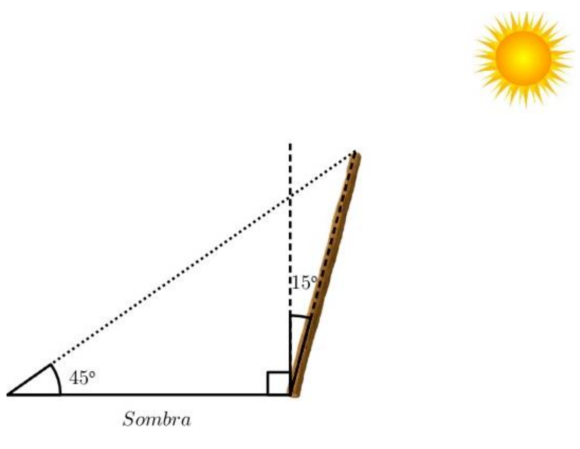




47. Determinar el valor del coseno de cada ángulo del triángulo de vértices $(1,-1)$, $(0,1)$ y $(2,3)$.
48. Encontrar la longitud de los lados restantes de un triángulo que tiene un lado de $5\ cm$ opuesto a un ángulo de $45°$, y otro ángulo de $75°$.
49. Una persona caminó primero $4\ km$ en dirección sur y luego $2\ km$ en dirección sudoeste. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

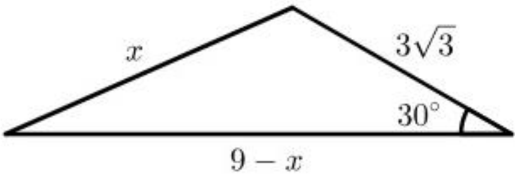


50. Encontrar el perímetro y el área de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia cuyo radio mide $2\ cm$.
51. Determinar el valor del lado de un octógono regular inscripto en una circunferencia de radio $5\ cm$.
52. Un poste vertical se inclina hacia el sol (según la figura) en un ángulo de $15°$ y proyecta una sombra de 8 metros. El ángulo de elevación desde la punta de la sombra hasta la parte superior del poste es de $45°$. ¿Cuál es el largo del poste?



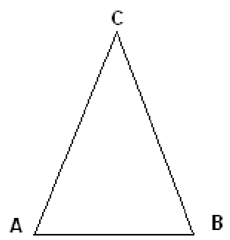
53. Determinar el valor del área y el perímetro de la región sombreada, sabiendo que el círculo tiene radio 1 metro.

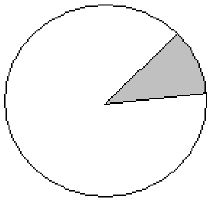
54. Utilizando los datos de la figura, determinar la medida de los restantes lados y el área del triángulo.



Actividades de repaso del Capítulo 4

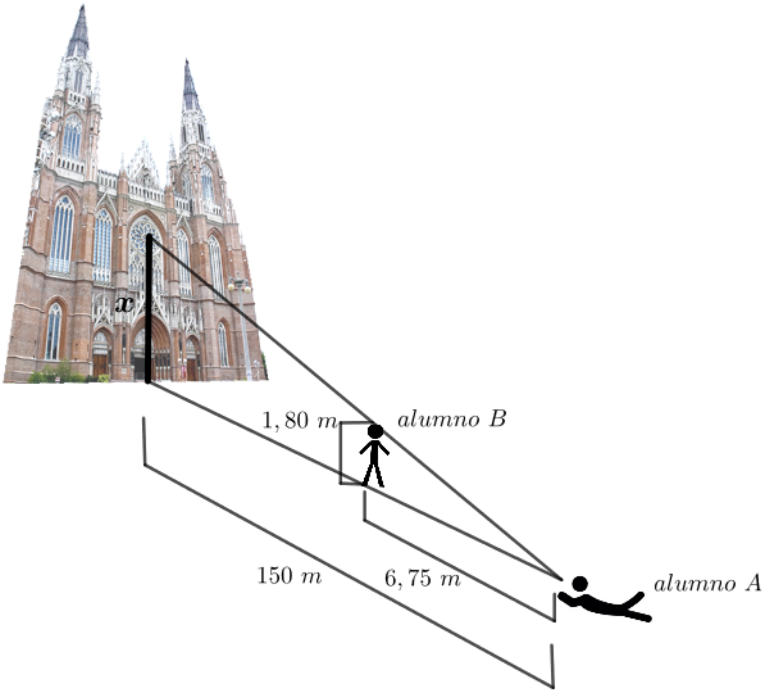
1. Dibujar el ángulo α que, ubicado en posición normal, su lado terminal pasa por el punto $P(-\sqrt{3},1)$.
   a) Calcular $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$ y $tg(\alpha)$.
   b) Encontrar el valor de α. Justificar.
2. Desde un punto del suelo situado a 5 metros de la base de un pedestal se ve la parte superior de este con un ángulo de elevación de $45°$, mientras que la parte superior de la estatua que se apoya sobre el pedestal se ve con un ángulo de elevación de $60°$. Hallar la altura del pedestal y de la estatua.
3. Un avión vuela en línea recta entre las ciudades A y B que distan entre sí $80\ km$. En determinado instante, las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de depresión de $30°$ y $45°$, respectivamente. ¿A qué altura está el avión en ese instante?
4. Demostrar que:
   a) $cos(\pi-\alpha)=-cos(\alpha)$
   b) $sen(\pi+\alpha)=-sen(\alpha)$
5. En el triángulo ABC se sabe que el ángulo C mide $30°$, que la longitud del lado AC supera en 2 centímetros a la medida del lado AB, y que la del lado BC es $2\sqrt{3}$ centímetros.
   a) Realizar un esquema de la situación.
   b) Calcular la medida de los tres lados.
   c) Calcular el área del triángulo.
6. Hallar el área del triángulo con vértices en los puntos $P(0,0)$, $Q(12,0)$ y $R(3,3\sqrt{3})$.
7. Calcular el perímetro del triángulo isósceles de la figura, sabiendo que
   $\hat{C}=45°$
   Medida del lado $AC=x^2-4$ metros
   Medida del lado $BC=3x$ metros





8. Calcular el perímetro y el área del sector circular sombreado en la figura sabiendo que el radio es de $6\ cm$ y el ángulo central es de $40°$.
9. Determinar, justificando, la veracidad o falsedad de las siguientes expresiones:
   a) Si $tg(\alpha)=\frac{1}{2}$ entonces $sen(\alpha)=1$ y $cos(\alpha)=2$.
   b) $sen(15°)=sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   c) Si un ángulo α con vértice en el centro de en una circunferencia de radio $4\ cm$, abarca un arco de $6\ cm$, entonces α mide $\frac{3}{2}\pi$ radianes.
   d) $cos(2\alpha)=\ 2.cos(\alpha)$.

10. Dos alumnos, A y B fueron a la Plaza Moreno para poder resolver el problema planteado al inicio del capítulo. El alumno A se posicionó en el centro geométrico de la plaza.



El alumno B, de $1{,}80$ metros de altura, se alejó de A en línea recta $6{,}75$ metros hacia la catedral. El alumno A, recostado sobre el suelo, vio el punto medio del rosetón exactamente sobre la cabeza de su compañero. Sabiendo que la distancia desde el centro de la plaza a la base de la catedral es de 150 metros, calcular la altura del centro del rosetón.

Consejos a tener en cuenta para realizar ejercicios

Al terminar el segundo módulo y antes de rendir el próximo parcial, es bueno que consideres las siguientes sugerencias para resolver ejercicios:

- ✓ No aproximar: Si el enunciado no lo pide, no aproximes. Deja el valor exacto, por más que esté expresado como una raíz. Otro ejemplo es: π vale π y no $3{,}14$ o $3{,}1415$.
- ✓ Ángulos: π aparece en algunos ángulos medidos en radianes, pero no en todos. No debes considerar que si no está π, no es un ángulo, ya que π no es una unidad de medida. Es decir, que puede haber ángulos dados en radianes que no involucren el número π. Si un ángulo está medido en grados, siempre debe llevar el símbolo °. Sin este símbolo, se sobreentiende que se trabaja en radianes, por ejemplo $sen(30°) \neq sen(30)$.
- ✓ No te olvides de que $\pi \neq 180$. Lo que es verdad es que π radianes equivale $180°$.
- ✓ Definir variables: Siempre que utilices una letra para representar alguna variable desconocida, hay que definirla bien. Ejemplo: P= Pedro, no nos da información de si estamos averiguando su edad, su peso, su altura, su DNI, etc… Define, por ejemplo, las variables P= Edad actual de Pedro, o F= cantidad de figuritas que tiene Juan.
- ✓ Dar respuesta: Siempre que en el enunciado haya una pregunta, asegúrate de dar una respuesta. Por ejemplo: El ángulo buscado es $\alpha = 45°$, el centro de la elipse es $(2,-5)$, el área pedida es de $35\ cm^2$, etc. Es importante responder con unidades de medida y que esté todo en la misma unidad de medida, cuando el contexto lo requiera.
- ✓ Esquematizar la situación: En los problemas de cónicas o de trigonometría, siempre conviene acompañar los cálculos con un gráfico o esquema en el que figuren los datos del problema que ya tienes y los que tienes que averiguar, o sea, las incógnitas. No importa si el gráfico es exacto, lo importante es tener una idea previa de lo que tienes que plantear.
- ✓ Identificación de cónica: Si un ejercicio te pide identificar una cónica, debes escribir claramente de qué tipo de cónica se trata. Por ejemplo: es una parábola vertical, es una circunferencia, etc.
- ✓ Justificar: Al realizar cálculos muchas veces utilizas propiedades o teoremas que debes nombrar para justificar los pasos realizados. Por ejemplo, por el Teorema del Seno, tenemos que… o por la relación fundamental sabemos que… etc.
- ✓ Verdaderos y Falsos: Cuando se pide que decidas por V o F sobre una afirmación, y justifiques tu elección, deberás utilizar contraejemplos para demostrar que algo es falso, pero no alcanza un ejemplo para demostrar que algo es verdadero. Se pueden hacer algunos ejemplos para decidir si alguna afirmación es verdadera o no, pero en caso de ser verdadera, es necesario probar de forma analítica, utilizando por ejemplo las propiedades.
- ✓ Notación: Nunca se debe escribir sen solo, sin el argumento. Siempre debe ser $sen(\alpha)$ o del ángulo que corresponda. Lo mismo pasa con las otras relaciones trigonométricas.

- ✓ También es importante prestar atención cuando respondes por ejemplo “el ángulo que verifica que $sen(\alpha) = \frac{1}{2}$ es $\alpha = 30°$”, y no escribir $sen(\alpha) = 30°$.
- ✓ Gráficos en $\mathbb{R}^2$: Cuando utilices gráficos con sistemas cartesianos siempre deben tener las flechas en los ejes positivos, el nombre de mismos (x e y) y, al menos, marcar una referencia en cada uno de ellos.
- ✓ Verificar: En los sistemas de ecuaciones es conveniente verificar si la o las soluciones halladas satisfacen TODAS las ecuaciones. No olvides, además, escribir las soluciones como el conjunto de los pares ordenados o las ternas, según corresponda. Cuando resuelves problemas, debes verificar si las soluciones encontradas corresponden a la situación del contexto del problema (por ejemplo en el caso de medidas descartar si encontraste alguna solución negativa)
- ✓ Aunque el Teorema del Seno o el del Coseno pueden ser utilizados para resolver triángulos rectángulos, no es lo más conveniente, ya que debes realizar más cálculos, y además, no debes olvidarte de nombrarlos.

Bibliografía recomendada

Anton, H., (1991), *Cálculo y Geometría analítica. Tomo 1.* Segunda Reimpresión, México, Editorial Limusa.

Ministerio de Educación del Ecuador, (2011), *Matemática 10*, Quito, Ecuador, Editorial Don Bosco.

Rojo, A.O., Álgebra I, (1996), *Álgebra I 18º ed.*, Buenos Aires, Argentina, Editorial El Ateneo.

Stewart, J.,Redlin, L. y Saleem W., (2007), *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo 5º ed.*, D.F., México,Thomson.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A., (2009), *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica 2º ed.*, México, Cengage Learning.

Zill, D. G. y Dewar, J. M., (1999), *Álgebra y Trigonometría*, México, McGraw-Hill.

Los autores

Di Domenicantonio, Rossana Mariel:

Es Calculista Científico, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata y Especialista en Tecnología Informática aplicada en Educación de la Facultad de Informática de la UNLP. Es profesora titular Matemática para Ingeniería en la Facultad de Ingeniería (FI). Ha trabajado como profesora adjunta en Matemática A y Matemática B en la FI. Actualmente es integrante de un proyecto de investigación acreditado por Universidad sobre diseño de recursos educativos, estrategias didácticas y articulación de la enseñanza de las Ciencias Básicas en Carreras de Ingeniería. Es directora de un proyecto de extensión en la FI en el que se busca articular la enseñanza de la matemática del nivel secundario con la del nivel universitario. Ha sido directora de un proyecto de investigación de la FI sobre la Enseñanza y Aprendizaje de la matemática en Carreras de Ingeniería.

Lubomirsky, Noemí:

Es licenciada en matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (FCE) y doctora en ciencias exactas área matemática, título que también obtuvo en la FCE. Es profesora adjunta en Matemática para Ingeniería en la Facultad de Ingeniería (FI). Ha trabajado en Matemática A en la FI y en diversas materias de las Facultades de Informática, la de Ciencias Económicas y la FCE. Participa en un proyecto de investigación en álgebra de la lógica en la FCE y es coordinadora de un proyecto de extensión en la FI en el que busca articular la enseñanza de la matemática del nivel secundario con la del nivel universitario. Obtuvo el premio Joaquín V. González, otorgado por la Municipalidad de La Plata y el premio al Egresado Distinguido, otorgado por la UNLP.

Rivera, Ana Lucía:

Es licenciada en matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (FCE) y actualmente se encuentra cursando la Especialización en docencia universitaria de la Universidad Nacional de La Plata. Es profesora adjunta en Matemática para Ingeniería de la Facultad de Ingeniería (FI) y jefe de trabajos prácticos en Matemática A y Matemática B en la FI. Ha trabajado en otras materias de la FI y FCE. Participa en un proyecto de extensión en la FI en el que busca articular la enseñanza de la matemática del nivel secundario con la del nivel universitario.

Este libro pretende ser una herramienta de estudio y aprendizaje para los alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería u otras que requieran de la matemática como herramienta para resolver problemas. Los conceptos abordados son de matemática inicial, con el fin que los estudiantes puedan tener una nivelación y lograr una base sólida en el inicio de su carrera universitaria. El libro introduce a los alumnos en el lenguaje abstracto y contenido matemático, así como también en un aprendizaje activo, autónomo y crítico; se espera que puedan realizar un recorrido profundizando conceptos y relacionarlos con aplicaciones a casos reales, con la representación gráfica cuando el tema lo requiere, realizando deducciones y relacionando temas con conceptos previos. Está diseñado para introducir un aprendizaje centrado en el estudiante, y como herramienta para los docentes que promueven el trabajo en grupo y colaborativo en las aulas de "Matemática PI", de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.

Rossana Mariel Di Domenicantonio Calculista Científico por la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (1987). Especialista en Tecnología Informática aplicada en Educación por la Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La Plata (2010). Profesor Titular Interino Dedicación Exclusiva de la Cátedra de Ingreso "Matemática Para Ingeniería" de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Profesor Adjunto Ordinario Dedicación Exclusiva del Área Matemática Básica, de las cátedras Matemática A y Matemática B. Investigador categoría IV del Programa Nacional de Incentivos del Ministerio de Educación de la Nación. Integrante del Proyecto de Investigación "Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería". Directora del Proyecto de Extensión "Mate-FI se extiende a la secundaria". Coordinadora del Proyecto "NEXOS: Articulación y Cooperación Educativa" en la Facultad de Ingeniería.

Noemí Lubomirsky es Doctora en Ciencias Exactas Área Matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. Es profesora adjunta de Matemática para Ingeniería y Matemática A de la Facultad de Ingeniería, además de ser docente en la Facultad de Ciencias Exactas. Es coordinadora del proyecto de extensión "Mate-FI se extiende a la secundaria".

Ana Lucía Rivera es licenciada en matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata. Es profesora adjunta en Matemática para Ingeniería y Jefe de Trabajos Prácticos en Matemática A y Matemática B en la Facultad de Ingeniería. Participa en el proyecto de extensión "Mate-FI se extiende a la secundaria".

ISBN 978-987-8348-16-2

9 789878 348162

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP